**EDL : Équations Différentielles Linéaire.**


**1 Primitives** 1
- 1.1 Rappel . . . 1
- 1.2 Une primitive difficile. . . . 1

**2 Primitiver une égalité** 2

**3 EDL1** 3
- 3.1 Vocabulaire et description des solutions. . . . 3
- 3.2 Résoudre l'équation homogène. . . . 4
- 3.3 Méthode de variation de la constante. . . . 4

**4 EDL2 à coefficients constants** 5
- 4.1 Vocabulaire et description des solutions. . . . 5
- 4.2 Résolution de l'équation homogène. . . . 6
- 4.3 Solution particulière. . . . 7

**5 Le principe de Cauchy** 8

**6 Exercices** 9


# 1 Primitives

## 1.1 Rappel

La grille classique pour les calculs de primitive est

> Monôme : par exemple $\dfrac{1}{x^n\sqrt{x}}$

> Mélange : par exemple $\sqrt{2x}+\dfrac{1}{2x}=\sqrt{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}$

> Produit, Quotient : Bli,Bli

MAIS $\dfrac{\square'}{\square}$ et $\square'\square$ et même $\square'\square^{\alpha}$ : par exemple $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ et $\dfrac{\ln(x)}{x}$

> Composée avec $u=ax+b$ =affine : $f(u)\rightsquigarrow\dfrac{1}{a}F(u)$ ; par exemple $\cos(2t)$, $e^{\frac{-t}{\tau}}$ ou $\sqrt{1-x}$

> Nouvô mais usuelle : $\dfrac{1}{1+x^2}\rightsquigarrow\arctan(x)$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\rightsquigarrow\arcsin(x)$

> DES=décomposition en éléments simples : par exemple $\dfrac{1}{x(x-1)}$ ou $\dfrac{1}{x^2-1}$

> Trigo avec produit $\rightsquigarrow$ plus de produit

**Théorème 1. Kulture ou IPP**

On peut aussi connaitre

> Une primitive de $te^{-t}$ est de la forme $(at+b)e^{-t}$
Une primitive de $(t^2+1)e^{2t}$ est de la forme $(at^2+bt+c)e^{2t}$

CàD (poly du même degré)× la même exp

> Une primitive de $\cos(t)e^{-t}$ est de la forme $\left[a\cos(t)+b\sin(t)\right]e^{-t}$
Une primitive de $\sin(t)e^{2t}$ est de la forme $\left[a\cos(t)+b\sin(t)\right]e^{2t}$

De façon plus générale les intégrales/primitives suivantes se font avec des IPP

$$\int^x \ln(t)\,dt \qquad \int^x \arctan(t)\,dt \qquad \int^x te^{-t}\,dt \qquad \int^x \sin(t)e^{2t}\,dt$$

Il restera au programme une dernière primitive difficile
que l'on verra au moment du cours sur DES.

## 1.2 Une primitive difficile.

Trouver une primitive de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

## 2 Primitiver une égalité

**Théorème 2. Primitivation des égalités.**

Soit $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto g(x)$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$.

On suppose que $\forall\, x \in I,\ f(x) = g(x)$

On peut primitiver l'égalité C'est possible car les fonctions sont continues,

Ainsi il existe une constante $K$ tel que : $\forall\, x \in I,\ F(x) = G(x) + K$

*De plus quand on primitive une égalité, on conserve les* $\Longleftrightarrow$

Exemple classique en math : on va résoudre l'équation $f'' = 0$.

$f'' = 0$, CàD $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 0$.

On primitive l'égalité

Ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \underbrace{0}_{\text{Une primitive de } 0} + a = a$.

On primitive à nouveau l'égalité

Ainsi il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{ax}_{\text{Une primitive de } a} + b$.

**Conclusion** : $f'' = 0 \Longleftrightarrow$ il existe a,b tel que : $\forall \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$

**Théorème 3. Deux applications classiques**

*En physique*

En mécanique, on rencontre $y'' = g$ où $g$ est la gravitation!!!! On a alors

$$y'' = g \Longleftrightarrow y''(t) = g \Longleftrightarrow y'(t) = gt + \underbrace{K}_{=y'(0)}$$

$$\Longleftrightarrow y(t) = \frac{1}{2} g\, t^2 + y'(0)\, t + \underbrace{L}_{y(0)}$$

$$\text{Conclusion : } \forall\, t \geqslant 0,\ y(t) = \frac{1}{2} g\, t^2 + \underbrace{y'(0)}_{=v_0}\ t + \underbrace{y(0)}_{=h_0}$$

*En math*

Soit $f$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence

$$f^{(n)} = 0 \Longleftrightarrow \textit{La fonction } f \textit{ est un polynôme de degré} \leqslant n$$

# 3 EDL1

## 3.1 Vocabulaire et description des solutions.

**Définition 4. Vocabulaire.**

Soit $I$ un intervalle.
Soit $a : x \mapsto a(x)$, $b : x \mapsto b(x)$ et $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$ des fonctions continues de $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> Une équation fonctionnelle
est une équation où l'inconnue est une fonction, souvent notée $y$.

> Une équation différentielle est une équation fonctionnelle faisant intervenir $y$, $y'$.

> Une *équation différentielle linéaire d'ordre 1* est une équation de la forme

$$\underbrace{\lambda(x)\, y' + a(x)\, y}_{\text{Partie Homogène}} = \underbrace{b(x)}_{\text{2-ième membre}}$$

> Une *équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisé* est une équation de la forme

$$\underbrace{1\, y' + a(x)\, y}_{\text{Partie Homogène Normalisée}} = \underbrace{b(x)}_{\text{2-ième membre}}$$

L'équation différentielle homogène associé est donc $y' + a(x)\, y = 0$.

Vocabulaire : Résoudre ou intégrer une équation différentielle,
c'est trouver toutes les fonctions **dérivables** $y$ qui vérifient l'équation.

**Théorème 5. Description de la forme des solutions d'une EDL1**

Soit $a, b$ des fonctions continues sur un intervalle $I$.
Soit l'équation normalisée : $y' + a(x)\, y = b(x)$.

Alors les solutions $y$ de l'equa diff sont la somme de

> Une solution particulière $y_p : x \longmapsto y_p(x)$ de l'équa diff complète

> Les solutions $h : x \longmapsto h(x)$ de l'équa diff homogène

$$\boxed{\text{Ainsi on a : } \forall\, x \in I,\ y(x) = y_p(x) + h(x)}$$

Soit $y$ une solution quelconque de l'équation complète et $y_p$ une solution particulière de l'équation complètes.

On a $\begin{array}{llll} y' + & a(x)\, y & = b(x) \\ y_p' + & a(x)\, y_p' & = b(x) \end{array}$

On fait la différence ainsi $(y - y_p)' + a(x)\,(y - y_p) = 0$

**Conclusion** : $y = y_p + h$

## 3.2 Résoudre l'équation homogène.

**Théorème 6. Le théorème générale**

Soit $a : x \longmapsto a(x)$ une fonction continue sur $I$, un intervalle.

On suppose que : $h$ est une fonction solution de l'équation différentielle : $y' + a(x)y = 0$.

On note $A(x)$ une primitive (sur $I$) de l'expression $a(x)$

Alors il existe une constante $K$ tel que $\forall\, x \in I,\ h(x) = K\,e^{-A(x)}$

*D'une part.*

les fonctions de la forme $K\,e^{-A(x)}$ sont solution de l'équation différentielle.

*D'autre part.* On suppose que $h$ est une solution de l'équation différentielle.

On va montrer que $h(x)$ est forcément de la forme $h(x) = K\,e^{-A(x)}$

On étudie la fonction $\varphi : x \longmapsto h(x)e^{A(x)}$

On déduit de l'étude que la fonction $\varphi$ est constante sur $I$

CàD $\forall\, x \in I,\ h(x)e^{A(x)} = K \iff h(x)e^{A(x)} = K\,e^{-A(x)}$

**Théorème 7. Le théorème spécial physique**

On suppose que : $h : t \longmapsto h(t)$ vérifie l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{\tau}y = 0$.

On a $a(t) = {}^{1}/_{\tau}$ et une primitive $A(t) = {}^{t}/_{\tau}$ Ici la variable c'est $t$

Alors il existe une constante $K$ tel que $\forall\, t \geqslant 0,\ h(t) = K\,e^{-{}^{t}/_{\tau}}$

## 3.3 Méthode de variation de la constante.

**Théorème 8. Solution particulière de l'equa diff complète**

Soit $a, b$ des fonctions continues sur un intervalle $I$.

Soit l'équation normalisée : $y' + a(x)y = b(x)$.

> Est ce que l'on ne vous a pas donné une solution particulière $y_p$ à la question Q.1.a ?

> Sinon **À la physicienne,** on essaye une solution particulière "évidente",

CàD on essaye $y_p : x \longmapsto C$ ou $y_p : x \longmapsto C\,x$ avec $C = C_{onstante}$

> Sinon *Méthode de variation de la constante*

On cherche une solution particulière de la forme $\lambda(x)\,h(x)$.

Les calculs conduisent alors à : $\lambda'(x)\,h(x) = b(x) \iff \lambda'(x) = \dfrac{b(x)}{h(x)}$ *Une primitive* $- - - - >$

**Théorème 9. Principe de Superposition.**

Soit $u, v, w_1, w_2$ sont des fonctions définie sur un intervalle $I$.

On suppose de plus que sur $I$ la fonction $u$ ne s'annule pas, CàD $\forall\, x \in I,\ u(x) \neq 0$.

On suppose

> La fonction $y_1$ est une solutions particulière (sur $I$) de : $u(x)y' + v(x)y = w_1(x)$.

> La fonction $y_2$ est une solutions particulière (sur $I$) de : $u(x)y' + v(x)y = w_2(x)$.

Alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solutions particulière (sur $I$)
de l'équation différentielle $u(x)y' + v(x)y = w_1 + w_2$.

# 4 EDL2 à coefficients constants

## 4.1 Vocabulaire et description des solutions.

**Définition 10. Vocabulaire.**
Soit $I$ un intervalle ouvert non vide.
Soit $a$, $b$ et $c$ trois constantes et $f$ une fonction continue sur $I$

> On dit que

$$\underbrace{ay'' + by' + cy}_{\text{Partie Homogène}} = \underbrace{f(x)}_{\text{2-ième membre}}$$

est une *équation différentielle linéaire du deuxième ordre.*

> On dit que : $ay'' + by' + cy = 0$ est *l'équation différentielle homogène associée.*

**Théorème 11. Description de la forme des solutions d'une EDL2**
Soit $a, b, c$ des constantes et $\phi$ une fonction continue sur un intervalle $I$.
Soit l'équation normalisée : $ay'' + by' + cy = \phi(x)$.

Alors les solutions $y$ de l'equa diff sont la somme

> D'une solution particulière $y_p$ de l'équa diff complète

> Des solutions $h$ de l'équa diff homogène.

CàD on a : $\forall\, x \in I,\ y(x) = y_p(x) + h(x)$

C'est la même démonstration que pour l'ordre 1.

## 4.2 Résolution de l'équation homogène.

**Définition 12. Équation Caractéristique.**

Soit $a, b, c$ trois constantes et soit (H) l'équation différentielle homogène $a\,h'' + b\,h' + c\,h = 0$

On dit que : $aX^2 + bX + c = 0$ est l'équation caractéristique de (H).

**Théorème 13. Équa diff classique d'ordre 2.**

Soit l'équa diff classique d'ordre 2 (homogène) $a\,h'' + b\,h' + c\,h = 0$ avec $a, b, c$ des constantes,
et son équation caractéristique $ax^2 + bx + c = 0$

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Alors l'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes $r$ et $r'$ dans $\mathbb{R}$.
et les solutions $h$ sont de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda e^{r\,x} + \mu e^{r'\,x} \quad \textit{avec } \lambda, \mu \textit{ des constantes.}$$

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Alors l'équation caractéristique admet 1 seule solution $r = r'$
et les solutions $h$ sont de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda e^{r\,x} + \mu x e^{r\,x} = (\lambda + \mu x).e^{r\,x} \quad \textit{avec } \lambda, \mu \textit{ des constantes.}$$

Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Alors l'équation caractéristique admet 2 solutions $r = \alpha + i\beta$ et $r' = \overline{r} = \alpha - i\beta$
et les solutions $h$ sont de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda\, e^{\alpha x}\cos(\beta t) + \mu\, e^{\alpha x}\sin(\beta t) \quad \textit{avec } \lambda, \mu \textit{ des constantes.}$$

*Remarque : Les constantes $\lambda, \mu$ se calculent avec les conditions initiales.*

Démonstration : Démonstration "Version écrit"

On va résoudre l'équation diff $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$
Ici $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$ et $r = 2$ et $r' = 3$ sont les sol de l'eq caract

> Question/Étape 1 : Montrer que :

$f$ est sol de $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$ Ssi $g = f' - 2f$ est sol de $y' - 3y = 0$

Démonstration : C'est longuet à rédiger mais pas difficile. On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

$$\text{Conclusion : } y'' - 5\,y' + 6\,y = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} g = f' - 2f \\ \textit{et} \\ g' - 3g = 0 \end{cases}$$

> Question/Étape 2 : On résout (A) puis on résout (B)

–> Les sol de $g' - 3g = 0$ sont : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = A\,e^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

–> Les sol de $f' - 2f = g = A\,e^{3x}$ sont (Je vous laisse faire les calculs qui sont plus ambigus qu'il y parait)

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{A'\,e^{3x}}_{\textit{Une sol part}} + \underbrace{B'\,e^{2x}}_{\textit{Les sol de l'eq Homo}}$$

**Conclusion on a bien :** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = .....\,e^{3x} + .....\,e^{2x}$**. Yes!!!**

Démonstration : Démonstration "Version oral péchue"

Soit $h$ une solution de l'équation différentielle homogène
On va chercher l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f = h.e^{-rx} \iff h = f\,e^{rx}$

Situation $\Delta \neq 0$

> On calcule $h'$ et $h"$, on trouve

$$\begin{array}{lll} h' & = f'e^{rx} + rfe^{rx} & et \quad h" = f"e^{rx} + 2rf'e^{rx} + r^2 ye^{rx} \\ & = (f' + rf)e^{rx} & = (f" + 2rf' + r^2 f)e^{rx} \end{array}$$

> Comme $h$ vérifie (H), on a

$$\begin{array}{ll} ah" & +bh' + ch = 0 \\ & \iff (af" + 2rf' + r^2 f)e^{rx} + (bf' + rf)e^{rx} + cf.e^{rx} = 0 \\ & \iff \left[af" + (2ra + b)f' + (ar^2 + br + c)f\right] e^{rx} = 0 \\ & \quad Or\ e^{rx} \neq 0\ et\ ar^2 + br + c = 0\ car\ r\ est\ une\ sol\ de\ l'équation\ caractéristique. \\ & \iff af" + (2ra + b)f' = 0 \end{array}$$

> On remarque que comme $r$ et $r'$ sont solution de l'équa caractéristique,

on a $r + r' = {}^{-b}/_{a}$ et donc $2ra + b = a(2r + \dfrac{b}{a}) = a(2r - r - r') = 2a(r - r')$
Ainsi on a

$$af" + (2ra + b)f' = 0 \iff af" + a(r - r')f' = 0 \iff f" - (r - r')f' = 0$$

On applique la théorie des équations différentielles d'ordre 1 à la fonction $f'$
et on en déduit $\forall\, x,\ f'(x) = \alpha e^{(r'-r)x}$.

> On primitive, on a $f(x) = \beta e^{(r'-r)x} + \alpha$

**Conclusion :** $\forall\, x, \quad h(x) = f(x)e^{rx} = \lambda e^{rx} + \mu e^{r'x}$

Fini.

Situation $\Delta = 0$

C'est la même démonstration mais comme $\Delta = 0$ on a en plus $r = {}^{-b}/_{2a}$
donc $ar^2 + br = 0$ Ainsi $af" + bf' + cf = 0 \iff af" = 0$.
Ainsi $f" = 0 \iff f' = \alpha \iff f = \alpha x + \beta$

**Conclusion :** $\forall\, x, \quad h(x) = f(x)e^{rx} = (\alpha x + \beta)e^{rx}$

## 4.3 Solution particulière.

**Théorème 14. Le principe du miroir.**

Pour trouver une solution particulière de l'équation

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$$

Il n'y a pas de méthode directe, la méthode de variation de la constante n'est pas transposable (en sup du moins) donc il faut s'adapter!!!
Le principe du miroir

$$f(x) \quad --|-- \quad y_p(x)$$

$$MIROIR \quad --|-- \quad \text{ЯІОЯІМ}$$

> Lorsque $f(x)$ = Poly de degré 1,
on cherche une solution particulière $y_p(x)$ = Poly de degré 1.

> Lorsque $f(x)$ = (Poly de degré 1) $\times\, e^{ax}$,
on cherche une solution particulière $y_p(x)$ = (Poly de degré 1) $\times\, e^{ax}$

> Lorsque $f(x) = \cos(\omega x)$,
on cherche une solution particulière $y_p(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$

# 5 Le principe de Cauchy

**Théorème 15. Principe de Cauchy d'ordre 1.**

Lorsqu'on résout une équation différentielle linéaire d'ordre 1, les solutions dépendent d'une constante $k$ que l'on peut déterminer avec une condition initiale.

Il n'y a alors plus d'indétermination et la solution est unique.

Principe de Cauchy Il existe une unique fonction $f$

> vérifiant une équa dif d'ordre 1

et

> satisfaisant à la condition initiale $f(x_0) = a$.

Exemple historique.

En terminale, la fonction exp est définie à l'aide de ce principe, CàD

La fonction exp est l'unique fonction vérifiant l'équa diff $y' = y$ et tel que $y(0) = 1$

**Théorème 16. Principe de Cauchy d'ordre 2.**

Quand on résout une équation différentielle linéaire d'ordre 2,
les solutions dépendent de 2 constante $\lambda$ et $\mu$ que l'on peut déterminer avec une condition initiale.

Il n'y a alors plus d'indétermination et la solution est unique.

Principe de Cauchy Il existe une unique fonction $f$

> vérifiant une équa dif d'ordre 2

et

> satisfaisant aux conditions initiales $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.

Exemples.

La fonction cos est l'unique fonction vérifiant

vérifiant l'équa diff $y'' = -y$ et tel que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

La fonction cosh est l'unique fonction vérifiant

vérifiant l'équa diff $y'' = +y$ et tel que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

`Kulture` : En intégrant les équations différentielle, on a montré que le problème de Cauchy avait une solution unique.
*Notre justification est valide car l'équation différentielle est linéaire et donc on sait la résoudre.*

Cauchy a démontré ces théorèmes pour toutes les équations différentielles linéaire et non-linéaire. Mais sa démonstration ne permet pas de résoudre explicitement les équations différentielle non-linéaire mais seulement (et c'est déjà remarquable) de justifier qu'elles ont une unique solution.

# 6 Exercices

## Équation du premier ordre

**Exercice 1.** [Correction] Résoudre les équations différentielles.

1. Sur $]0,+\infty[$, $\left(1+x^2\right)\ y'(x)+2x\ y(x)=\dfrac{1}{x}$
2. Sur $]0,+\infty[$, $2xy'-3y=\sqrt{x}$
3. sur $]0,1[$, $x\,y'+2\,y=\dfrac{1}{1-x^2}$
4. Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos t\ y'+\sin t\ y=1$

**Exercice 2.** [Correction] Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont les solutions sont les fonctions définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x+A}{1+x^2}$$

1. Identifier qui doit être la solution de l'équation homogène et la solution particulière.
2. Déterminer l'équation différentielle homogène.
3. Déterminer le second membre.

**Exercice 3.** Soit $\lambda\neq -1$ et $f$ l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y'+y=e^{\lambda x}$ et tel que $f(0)=1$.

Déterminer $f$ puis trouver les réels $\lambda$ tels que la fonction $f$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

**Exercice 4.** [Correction] Trouver les fonctions $f$ de $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f'+f=f(0)+f(1).$$

**Exercice 5.** [Correction] On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)$ .

$$y'+y-xy^2=0\qquad (E)$$

On suppose que la fonction $y$ est une solution de $(E)$ et on suppose que la fonction $y$ ne s'annule pas.
On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $z$ par la formule $z(x)=\dfrac{1}{y(x)}$

1. Déterminer l'équation $\left(E'\right)$ vérifiée par la fonction $z$.
2. Déterminer $z(x)$ puis $y(x)$.

**Exercice 6.** [Correction] Soit $f$ une fonction dérivable vérifiant

$$\forall x,y \text{ dans } \mathbb{R},\ \ f\left(x+y\right)=f(x)+f\left(y\right)$$

*Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase : "J'applique l'égalité avec ....."*

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. Pour la suite, on note $\alpha=f'(0)$.
   (a) Montrer que : $\forall t,\ f'(t)=\alpha$.
   (b) Déterminer $f$.

**Exercice 7.** [Correction] Soit $f$ une fonction dérivable vérifiant

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

*Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase : "J'applique l'égalité avec ....."*

1. Calculer $f(0)$ et montrer que la fonction $f$ est positive.
2. On suppose que $f(0) = 0$.
   Montrer que : la fonction $f$ est constante égale à $0$.
3. On suppose que $f(0) = 1$. Et on note $\alpha = f'(0)$.
   (a) Montrer que : $\forall\, t\in\mathbb{R},\ f'(t) = \alpha f(t)$
   (b) Résoudre l'équation différentielle
   (c) Déterminer $f$.

**Exercice 8.** [Correction] Le but est de déterminer les fonctions $f$ définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$, vérifiant

$$\forall\, x, y > 0,\ f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Généralité.
   (a) Montrer que : $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
   (b) Montrer que la fonction $f$ est positive.
   (c) On suppose que $f(1) = 0$.
   Déterminer $f$.

   On suppose dorénavant que $f(1) = 1$

2. On suppose que $f$ est dérivable et que $f(1) = 1$. On note $f'(1) = \alpha$.
   Déterminer $f$.
   *Indication : on montrera que $f$ est solution d'une équation différentielle.*
3. On suppose que $f$ est simplement continue et que $f(1) = 1$.
   Montrer que la fonction $f$ est dérivable puis déterminer $f$.
   *Indication : Comme $f$ est continue alors elle admet des primitives puis on primitive.*

## Équation du deuxième ordre

**Exercice 9.** Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations différentielles suivantes

$$y''=0 \qquad y''=g$$
$$y''-y=0 \qquad y''+4y'=0$$
$$y''+y=0 \qquad y''+4y=0$$
$$y"-4y'+3y=0 \qquad y"-6y'+9y=0 \quad \text{avec } y(0)=1 \text{ et } y'(0)=1$$

**Exercice 10.** Trouver une solution particulière pour les équations différentielles suivante

$$y''+y'+y=3$$
$$y''+y'+y=2x$$
$$y''+y=x \quad et \quad y''+y=e^{4x} \quad puis \quad y''+y=x+e^{4x}$$
$$y''+y=\cos(2x)$$

**Exercice 11.** Soit $f$ une fonctions vérifiant : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(-x)$

1. Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
2. Trouver $f$.

**Exercice 12.** [Correction] On suppose que la fonction $y$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x>0,\ x^2.y''(x)+3x.y'(x)+y(x)=x^3.$$

On considère la fonction $z$ définie par $z:t\longmapsto z(t)=y\left(e^t\right)$.
*On dit en langage vulgaire que l'on fait le changement de variable* $x=e^t$

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z$
2. Déterminer la fonction $z$ puis la fonction $y$.

**Exercice 13.** [Correction] On considère l'équation différentielle $(E)$

$$\forall\, x>0,\ y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène.
2. Chercher une solution particulière $y_0$ de la forme $y_0(x)=z(x)e^{-x}$, où $z$ est une fonction à déterminer.
3. Conclure.

**Exercice 14.** Soit $y:x\longmapsto y(x)$ une solution de l'équation différentielle $(E)$

$$\forall\, x\in]-1,1[,\ (1-x^2)y''-xy'+y=0 \qquad (E)$$

On considère la fonction $z$ par $z(t)=y(\sin t)$.
*On dit en langage vulgaire que l'on fait le changement de variable* $x=\sin t$.

1. Déterminer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les ensembles de définition et de dérivabilité de $z$.
   Déterminer l'équation $\left(E'\right)$ vérifiée par $z$.
2. Déterminer $z$ puis $y$.

**Exercice 15.** [Correction] Soit $f:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$\begin{cases} f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x>0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1. Montrer que : pour tout $t>0$, $t^2f''(t)+f(t)=0$.
2. On considère la fonction $g$ définie par $g(u)=f\left(e^u\right)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de $g$ et montrer que $g$ est solution d'une équation différentielle linéaire.
   (b) Déterminer $g$.
3. Déterminer $f$.

**Exercice 16.** On cherche à déterminer les fonctions deux fois dérivables vérifiant

$$f'(x)=2f(-x)+x \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \quad (E)$$

1. On considère l'équation différentielle $(F)$ $y''+4y=2x+1$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle homogène.
   (b) Déterminer une solution particulière de la forme $y_p:x\mapsto ax+b$
   (c) Donner les solution de $(F)$.
2. Résolution de $(E)$.
   Soit $f$ une solution de $(E)$.
   (a) Démontrer que $f$ est solution de $(F)$.
   (b) Pourquoi ne peut-on pas conclure ?
   (c) Démontrer que l'on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\lambda\left[\cos(2x)+\sin(2x)\right]$$

## Principe-Processus de Cauchy.

**Exercice 17.** On veut que : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ e^{x+y}=e^x+e^y$
Montrer que les fonction $f:x\longmapsto e^{x+y}$ et $g:x\longmapsto e^xe^y$ vérifie le même 'processus de Cauchy'

$$y'-y=0 \text{ et } y'(0)=e^y$$

Conclure

**Exercice 18.** Soit les fonction $f:x\mapsto\cos(x+a)$ et $g;x\mapsto\cos(x)\cos(a)-\sin(x)\sin(a)$
1. Vérifier $f$ est solution de l'équa diff $y''=-y$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier $g$ est solution de l'équa diff $y''=-y$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. En déduire (à l'aide du principe de Cauchy) que : $\cos(x+a)=\cos(x)\cos(a)-\sin(x)\sin(a)$.

**Exercice 19.** [Correction] Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $h$ une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue et périodique de période $T>0$
On étudie l'équation différentielle : $(E)$ $y'+ay=h(x)$
1. Montrer que, si $f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)$, alors la fonction $g:x\longmapsto f(x+T)$ l'est aussi.
2. En déduire qu'une solution $f$ est T-périodique si et seulement si $f(0)=f(T)$
3. Écrire toutes les solutions de l'équa diff $(E)$.
   En déduire que l'équation $(E)$ admet une unique solution T-périodique.

# Correction.

**Solution de l'exercice 1** (Énoncé) 1. A faire

2. On résout sur $]0,+\infty[$

$$\forall x>0,\ 2xy'-3y=\sqrt{x}$$
$$\iff y'-\frac{3}{2x}y=\frac{\sqrt{x}}{2x}$$

*Une primitive de* $-\frac{3}{2x}$ *est* $-\frac{3}{2}\ln|x|=-\frac{3}{2}\ln x$

$$\iff \left[y'-\frac{3}{2x}y\right]e^{-\frac{3}{2}\ln x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{3}{2}\ln x}$$
$$\iff \left[y.e^{-\frac{3}{2}\ln x}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{-\frac{3}{2}\ln x}=\frac{1}{2\,x^{-2}}$$

Ainsi il existe une constante $k$ telle que $x^{-\frac{3}{2}}y(x)=\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{(-1)}+k$

Conclusion : pour $x>0$, $\quad y(x)=\left(-\frac{1}{2x}+k\right)x^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{x}+kx\sqrt{x}$

3. On résout sur $]0,1[$

$$\forall x\in]0,1[,\ x\,y'(x)+2y(x)=\frac{1}{1-x^2}$$
$$\iff y'(x)+\frac{2}{x}y(x)=\frac{1}{x(1-x^2)}$$

*Une primitive de* $\frac{2}{x}$ *est* $2\ln|x|=2\ln x$

$$\iff \left(y'(x)+\frac{2}{x}y(x)\right)e^{2\ln x}=\frac{1}{x(1-x^2)}e^{2\ln x}$$
$$\iff \left[y(x)e^{2\ln x}\right]'e^{-2\ln x}=\frac{1}{x(1-x^2)}x^2$$
$$\iff \left[y(x)e^{2\ln x}\right]'=\frac{x}{(1-x^2)}=-\frac{x}{(x^2-1)}$$

Ainsi $\forall x\in]0,1[,\ x^2y(x)=-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+K=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+K$

**Conclusion** : $\forall x\in]0,1[,\ y(x)=-\frac{1}{2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}+\frac{K}{x^2}$

4. On résout sur $]0,\pi[$

> **Méthode classique.**

$$\forall x\in]0,\pi[,\ \sin(x)\,y'(x)-\cos(x)\,y(x)=1$$
$$\iff y'(x)-\frac{\cos x}{\sin x}y(x)=\frac{1}{\sin(x)}$$

*Une primitive de* $-\frac{\cos x}{\sin x}$ *est* $-\ln|\sin(x)|=-\ln(\sin(x))$

$$\iff \left[y'(x)-\frac{\cos x}{\sin x}y(x)\right]e^{-\ln\sin x}=\frac{1}{\sin(x)}e^{-\ln\sin x}$$
$$\iff \left[y(x)e^{-\ln\sin x}\right]'=\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Après tout ces calculs, il y a un gros problème, c'est

$$\frac{1}{\sin^2 x} \overset{\text{Une Primitive}}{\rightsquigarrow} BOF$$

Remarque : une primitive de $\frac{1}{\sin^2(x)}$ est $-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ donc on peut continuer.

> **Méthode astucieuse.**
On a

$$\forall\, x \in ]0,\pi[,\ \sin(x)\, y'(x) + \cos(x)\, y(x) = 1 \iff \left[\sin(x)\, y(x)\right]' = 1$$

Ainsi il existe une constante $k$ telle que : $\sin x.y \ = x + k$

$$\iff \forall\, x \in ]0,\pi[,\ \ y(x) * = \frac{x}{\sin(x)} + \frac{k}{\sin(x)}$$

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)** On doit avoir

$$f(x) = \frac{x+A}{1+x^2} = \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\text{Sol particulière}} + \underbrace{\frac{A}{1+x^2}}_{\text{Sol de l'eq Homogène}}$$

On commence par trouver l'équation homogène Comme $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]' = 2x\frac{-1}{(1+x^2)^2}$

Ainsi l'équation homogène est : $(1+x^2)y' + 2xy = 0$

Puis trouve le second membre pour que $\frac{x}{1+x^2}$ soit une sol particulière

$$\text{On a : Second Membre} = (1+x^2)\left[\frac{x}{1+x^2}\right]' + 2x\frac{x}{1+x^2}$$

**Solution de l'exercice 4 (Énoncé)** Les fonctions $f$ sont des solutions de l'équation différentielle $y' + y = K$ où $K$ est une constante, ainsi avec la théorie classique on trouve

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \lambda\, e^{-x} + K$$

De plus $f$ soit effectivement une solution Ssi

$$\begin{aligned} K = f(0) + f(1) &= (\lambda\, e^{-0} + K) + (\lambda\, e^{-1} + K) \\ &\iff K = -(1+e^{-1})\lambda \end{aligned}$$

Conclusion : Les fonctions cherchées sont : $\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \lambda\, e^{-x} - (1+e^{-1})\lambda$

**Solution de l'exercice 5** **(Énoncé)** On suppose que la fonction $y$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = x\,y^2.$$

Remarque : Il y a $y^2$ donc l'équation différentielle n'est pas linéaire et Donc le théories classiques ne s'appliquent pas.

1. On suppose que la fonction $y$ ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$.
   On considère la fonction $z$ définie par $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$.

   On a $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

   comme la fonction y ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$

   La fonction $z$ est bien définie et ne s'annule pas sur $\mathfrak{D}$

   $\Longrightarrow$ On a donc $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ et $y'(x) = \left[y(x)\right]' = \left[\frac{1}{z(x)}\right]' = \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2}$

   **Conclusion** : $y'(x) + y(x) = \left[y(x)\right]^2$

   On remplace $y(x)$ et $y'(x)$

   $$\Longrightarrow \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2} + \frac{1}{z(x)} = \left[\frac{1}{z(x)}\right]^2$$

   $$\Longrightarrow -z'(x) + z(x) = 1$$

2. l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z$ est classique donc
   Avec la théorie classique s'applique, on déterminer la fonction $z$ puis la fonction $y$.

**Solution de l'exercice 6 (Énoncé)** Soit $f$ une fonction $C^\infty$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase

"J'applique l'égalié avec .....

1. Montrer que $f(0) = 0$.

   J'applique l'égalité avec $x = 0$ et $y = 0$, ainsi

   $$f(0+0) = f(0) + f(0)$$
   $$\Longrightarrow \textit{(on ré-organise )} f(0) = 0$$

2. Pour la suite, on note $\alpha = f'(0)$.

   (a) Montrer que : $\forall t,\ f'(t) = \alpha$.

   je dérive l'égalité par rapport à $x$

   $$\frac{d}{dx}\left[\ f(x+y)\ \right] = \frac{d}{dx}\left[\ f(x) + f(y)\ \right]$$
   $$\textit{Ainsi on a : } \forall\, x, y,\ 1.f'(x+y) = f'(x) + 0$$

   J'applique l'égalité avec $x = 0$ et $y = t$,

   ainsi on a $f'(t) = \alpha$.

   (b) Déterminer $f$.

   On a maintenant $f'(t) = \alpha$

   $$\Longrightarrow \textit{ Il existe k tel que } f(t) = \alpha\, t + k$$

   De plus on sait que $f(0) = 0$ donc forcément $k = 0$, CàD $f(x) = \alpha\, x$

   `Attention : on n'a pas trouvé` $f$ `mais seulement la forme "possible"`

   Vérification-Synthèse.

   On suppose que $f(x) = \alpha\, x$, on a : $f(x+y) = \alpha\,(x+y)$ et $f(x) + f(y) = \alpha\, x + \alpha\, y$

   Conclusion : Les fonctions $f(x) = \alpha\, x$ conviennent.

| **Conclusion** : les fonctions dérivable vérifiant $(E)$<br>Sont : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = \alpha\, t$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ |
|---|

**Solution de l'exercice 7 (Énoncé)** Soit $f$ une fonction $C^\infty$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase

"J'applique l'égalié avec .....

1. Calculer $f(0)$

   J'applique l'égalité avec $x=0$ et $y=0$, ainsi $f(0+0) = f(0).f(0)$

   $$\iff f(0) - [f(0)]^2 = 0$$
   $$\iff f(0)[1-f(0)] = 0$$
   $$\iff f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$$

   Montrer que la fonction $f$ est positive.

   J'applique l'égalité avec $x/2$ et $x/2$, ainsi $f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right)$

   $$\iff f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0$$

   Conclusion : $\forall x,\ f(x)\geqslant 0$, CàD la fonction $f$ est positive.

2. On suppose que $f(0)=0$. Montrer que : la fonction $f$ est constante égale à $0$.

   On suppose que $f(0)=0$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$

   On veut montrer que $f(x)=0$

   J'applique l'égalité avec $x$ et $y=0$
   Ainsi on a $f(x) = f(x).f(0) = f(x).0 = 0$
   **Conclusion** : $\forall x,\ f(x)=0$, CàD la fonction est constante égale à $0$.

3. On suppose que $f(0)=1$. Et on note $\alpha = f'(0)$.

   (a) Montrer que : $\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t) = \alpha f(t)$

   Pour tout $y\in R$. On dérive l'égalité $(E)$ par rapport à $x$

   Ainsi on a $\frac{d}{dx}[f(x+y)] = \frac{d}{dx}[f(x)f(y)]$
   $$\implies 1f'(x+y) = f'(x)f(y)$$

   On a donc la nouvelle égalité $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f'(x+y) = f'(x)f(y)$

   J'applique cette nouvelle égalité avec $x=0$ et $y=t$

   Ainsi on a $f'(t) = f'(0)f(t) = \alpha f(t)$
   $$\implies f'(t) - \alpha f(t) = 0$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle

   $>$ C'est une EDL1

   $>$ On a $a(x) = -\alpha$ et une primitive $A(x) = -\alpha x$

   $>$ Ainsi on a : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = K.e^{\alpha t}$

   (c) Déterminer $f$.

   On sait que $f(0) = Ke^{\alpha 0} = 1$ donc forcément $K=1$, CàD $f(x) = e^{\alpha x}$
   De plus, il est facile de vérifier que

   Si $f(x) = e^{\alpha x}$, alors on a bien $f(x+y) = f(x).f(y)$

**Conclusion** : les fonctions dérivable vérifiant $(E)$
Sont : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

**Solution de l'exercice 8 (Énoncé)**

1. Généralité.

   (a) Montrer que : $f(1)=0$ ou $f(1)=1$.

   J'applique l'égalité avec $x=1$ et $y=1$

   ainsi $f(1.1)=f(1).f(1)$

   $\Longrightarrow f(1)-f(1)^2=0$

   $\Longrightarrow f(1)[1-f(1)]=0 \Longrightarrow f(1)=1$ ou $f(1)1$

   Conclusion : $f(1)=0$ ou $f(1)=1$.

   (b) Montrer que la fonction $f$ est positive.

   Pour tout $x>0$, j'applique l'égalité avec $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}$

   ainsi $f(\sqrt{x}.\sqrt{x})=f(\sqrt{x}).f(\sqrt{x})$

   $\Longrightarrow f(x)=\left[f(\sqrt{x})\right]^2 \geqslant 0$

   Conclusion : $\forall x>0,\ f(x)\geqslant 0$, CàD la fonction $f$ est positive.

   (c) On suppose que $f(1)=0$. Déterminer $f$.

   Pour tout $x>0$, j'applique l'égalité avec $x$ et $y=1$

   ainsi $f(x.1)=f(x).f(1)$

   $\Longrightarrow f(x)=0$ car $f(1)=0$

   Conclusion : $\forall x>0,\ f(x)=0$, CàD la fonction $f$ est nulle.

   **On suppose dorénavant que $f(1)=1$**

2. On suppose que $f$ est dérivable et que $f(1)=1$. On note $f'(1)=\alpha$. Déterminer $f$.

   > On dérive l'égalité par rapport à $x$, ainsi $\dfrac{d}{dx}\left[f(x.y)\right]=\dfrac{d}{dx}\left[f(x)f(y)\right]$

   Ainsi on a : $\forall x,y>0,\ t.f'(x.y)=f'(x).f(y)$

   > On applique cette égalité avec $x=1$ et $y=t$,

   Ainsi on a : $\forall t,\ t.f'(t)=\alpha.f(t)$.

   Conclusion intermédiaire : la fonction $f$ est solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'EDL 1 $t.y'-\alpha.y=0$

   > On résout, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'EDL1 : $t.y'-\alpha.y=0 \Longleftrightarrow y'-\dfrac{\alpha}{t}.y=0$

   On a $a(t)=-\dfrac{\alpha}{t}$ et une primitive $A(t)=-\alpha.\ln|t|$

   Donc on sait que : $\forall t>0,\ y(t)=K.e^{-A(t)}=K.e^{\alpha.\ln|t|}=K.t^{\alpha}$

   > Ainsi on a $\forall t>0,\ f(t)=K.t^{\alpha}$ et $f(1)=1$ donc $K=1$

   > Conclusion : Les fonctions $f:t\longmapsto K.t^{\alpha}$ sont les solutions possibles

   Ils est facile de vérifier qu'elles conviennent. Ce sont bien les solutions

3. On suppose que $f$ est simplement continue et que $f(1)=1$.
   Montrer que la fonction $f$ est dérivable puis déterminer $f$.

   > Comme $f$ est continue alors elle admet des primitives. On note $F$ l'une d'elle.

   > On primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ et par rapport à $x$, l'égalité $f(x.y)=f(x).f(y)$

   ainsi $\forall x,y>0,\ \dfrac{1}{y}F(x.y)=F(x).f(y)$

   > J'applique cette égalité avec $x=1$ et $y=t>0$, ainsi $\forall t>0,\ f(t)=\dfrac{F(t)}{t.F(1)}$

   Conclusion : $f(t)=\dfrac{F(t)}{t.F(1)}$, CàD $f(t)$ à l'aide de fonction dérivable

   Donc la fonction $f$ est dérivable.

   Remarque : Il faut aussi justifier que $F(1)\neq 0$.

   C'est possible car il n'y a pas une seul primitive mais plein de primitive de la forme $F+Constante$. donc on peut choisir une primitive avec $F(1)\neq 0$

   > On a justifier qu'en fait la fonction $f$ est dérivable. La conclusion précédente est vraie

Conclusion : Les fonctions continue vérifiant $\forall x, y > 0,\ f(x.y) = f(x).f(y)$
sont $f : t \longmapsto t^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Solution de l'exercice 12 (Énoncé)** On suppose que la fonction $y$ est solution de l'équation différentielle

$$x^2.y''(x) + 3x.y'(x) + y(x) = x^3.$$

1. L'équation est linéaire du 2-ième orcre **MAIS les coefficients ne sont pas constants**

   *Donc le théories classiques ne s'appliquent pas.*

2. On considère la fonction $z$ définie par $z(t) = y\left(e^t\right)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } z(t) &= y\left(e^t\right). \\ \Rightarrow \text{ On a donc } z'(t) = \left[y\left(e^t\right)\right]' = e^t y'\left(e^t\right). \text{ et } z''(t) &= \left[y\left(e^t\right)\right]'' \\ &= \left[e^t.y'\left(e^t\right)\right]' \\ &= e^t.y'\left(e^t\right) + e^t.e^t.y''\left(e^t\right) \\ &= e^t.y'\left(e^t\right) + e^{2t}.y''\left(e^t\right) \end{aligned}$$

   On sait que $x^2.y''(x) + 3x.y'(x) + y(x) = x^3$.

   → J'applique cette égalité avec $x = e^t$, ainsi

$$\left(e^t\right)^2.y''\left(e^t\right) + 3e^t.y'\left(e^t\right) + y\left(e^t\right) = \left(e^t\right)^3$$

$$\text{On a donc } \left[\underbrace{\left(e^t\right)^2.y''\left(e^t\right) + 3e^t.y'\left(e^t\right)}_{\text{C'est } z''(t)}\right] + 2\left[\underbrace{e^t.y'\left(e^t\right)}_{\text{C'est } z'(t)}\right] + y\left(e^t\right) = e^{3t}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \ z''(x) + 2z'(x) + z(t) = e^{3t}}$$

*A noter : Les calculs ci dessus sont possibles SSi on peut écrire $x = e^t$ CàD si $x > 0$.* Donc $\mathfrak{D} = ]0, +\infty[$

**Remarque** : *l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z$ est classique.*

**Solution de l'exercice 13 (Énoncé)** Correction rapide

1. L'équation caractéristique $X^2+3X+2=0$ a pour racine $r=-1$ et $r=-2$, ainsi d'après la théories des équations différentielles, il existe $\lambda,\mu$ tel que
$$\forall\, x\in]0,+\infty[,\ y_h(x)=\lambda\, e^{-x}+\mu\, e^{-2x}$$
2. On cherche une solution particulière de l'équation complète de de la forme $y_p(x)=z(x)\,e^{-x}$.
On a $y_p(x)=z_p(x)\,e^{-x}$
$y_p'(x)=z_p'(x)\,e^{-x}-z_p(x)\,e^{-x}$
$y_p''(x)=z_p''(x)\,e^{-x}-2\,z_p'(x)\,e^{-x}+z_p(x)\,e^{-x}$
Ainsi
$$\begin{aligned} y_p''+3y_p'+2y_p=\frac{x-1}{x^2}e^{-x} & \\ \textit{on replace} & \\ \iff \left[z_p''(x)\,e^{-x}-2\,z_p'(x)\,e^{-x}+z_p(x)\,e^{-x}\right] & \\ +3\left[z_p'(x)\,e^{-x}-z_p(x)\,e^{-x}\right]+2\left[z_p(x)\,e^{-x}\right]=\frac{x-1}{x^2}e^{-x} & \\ \textit{on factorise, on regroupe et on simplifie par } e^{-x}\neq 0 & \\ \iff z_p''(x)+z_p'(x)=\frac{x-1}{x^2} & \end{aligned}$$
Donc $z_p'$ est une solution d'une équation diff classique d'ordre 1 et on la résoutr avec la méthode classique
$$\begin{aligned} z_p''+z_p'=\frac{x-1}{x^2} & \\ \iff \left[z_p'\,e^{x}\right]'=\frac{x-1}{x^2}e^{x} & \\ \text{Ainsi il existe } k \text{ tel que } \left[z_p'\,e^{x}\right]=\frac{e^x}{x}+k & \\ \text{On a donc : } \forall\, x>0,\ z_p'(x)=\frac{1}{x}+k\,e^{-x} & \end{aligned}$$
Conclusion : $\forall\, x>0,\ z_p(x)=\ln|x|-k\,e^{-x}+m$ est une solution particulière.
3. Comme l'équation différentielle est linéaire, les solutions sont la somme
> d'une solution particulière par exemple $y_p(x)=z_p(x)\,e^{-x}=\ln(x)\,e^{-x}$ je veux une sol part et je choisis $k=m=0$
> des solutions de l'équation homogène.

Conclusion : Les solutions $y$ de l'équation différentielle sont de la forme
$$\forall\, x>0,\ y(x)=\ln(x)\,e^{-x}+\lambda\, e^{-x}+\mu\, e^{-2x} \text{ avec } k,m\in\mathbb{R}$$

**Solution de l'exercice 15 (Énoncé)** Soit $f$ une fonction de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$\begin{cases} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x>0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1. On sait que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   → On dérive cette égalité $[...]' = [...]'$,

   $$\text{Ainsi } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

   → On applique $f'(\square) = f\left(\frac{1}{\square}\right)$ avec $\square = \frac{1}{x}$

   $$\text{Ainsi } f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \text{ on a donc } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$$

   On a bien $t^2 f''(t) + f(t) = 0$. $_{Fini}$ [rq les calculs sont valides sur l'intervalle $]0,+\infty[$ ]

2. On considère la fonction $g$ définie par $g(u) = f\left(e^u\right)$.

   (a) On peut calculer le nombre $g(u)$ Ssi $e^u \in D_f = ]0,+\infty[$ Donc pas de problème car $e^{\square}>0$.

   $$\text{Donc } g \text{ est def, } C^0 \text{ et même } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

   (b) On a $g(u) = f\left(e^u\right)$

   $$\Rightarrow g'(u) = \left[f\left(e^u\right)\right]' = e^u f'\left(e^u\right) \text{ et } g''(u) = \left[e^u f'\left(e^u\right)\right]' = e^u f'\left(e^u\right) + \left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right)$$

   On a donc

   $$A\ g''(u) + B\ g'(u) + C\ g(u) = A\ \left(e^u f'\left(e^u\right) + \left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right)\right) + B\ e^u f'\left(e^u\right) + C\ f\left(e^u\right)$$

   $$= A\ \left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right) + (A+B)\ e^u f'\left(e^u\right) + C\ f\left(e^u\right)$$

   Je choisis $A=1$ et $A+B=0$ et $A=C$

   $$= \left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right) + f\left(e^u\right) = 0$$

   Car c'est l'équa diff de Q1 avec $t = e^u$.

   (c) La fonction $g$ est solution de l'équation différentielle

   $$1\ g''(u) + (-1)\ g'(u) + 1\ g(u) = 0$$

   On sait la résoudre.

3. On sait que $f\left(e^u\right) = g(u)$, on applique avec $u = \ln x$ ainsi

   $$f(x) = g(\ln x)$$

   → **Attention** : *Comme la résolution est longue, on a surement fait des ⇒ donc il faut vérifier parmi les solutions trouvées, celles qui effectivement vérifient* $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $f(1)=1$

**Solution de l'exercice 19 (Énoncé)**

1. ok
2. ok
3. Les sol de $(E)$ $y' + a\,y = h(x)$ sont la somme ....

   $$\text{On a donc } \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = f(x) + K\,e^{-ax}$$

   La fonction $y$ est périodique Ssi $y(0) = y(T)$

   $$\text{Ssi } f(0) + K = f(T) + KJ\,e^{-aT} \text{ Ssi } T = .....$$

**Conclusion :** l'équation $(E)$ admet une unique solution T-périodique