Ensemble, Fonction.

1 Les ensembles **1**
- 1.1 Les éléments. . . . 1
- 1.2 Inclusion, Intersection, ... 2
- 1.3 Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$. . . . 3

2 Fonction-Injectivité-Surjectivité. **4**
- 2.1 Les fonctions. . . . 4
- 2.2 Injectivité. . . . 5
- 2.3 Antécédent-Image d'une fonction-Surjectivité. . . . 6

3 Bijection-Bijection Réciproque. **7**
- 3.1 Bijection. . . . 7
- 3.2 Bijection réciproque. . . . 8

4 Exercices **9**

5 Compléments **12**
- 5.1 Fonction indicatrice. . . . 12
- 5.2 Restriction. . . . 12
- 5.3 Image direct et Image réciproque d'une partie. . . . 12

1 Les ensembles

1.1 Les éléments.

Nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'ensemble, celle-ci sera considérée comme intuitive. Nous nous contenterons de la « définition » suivante :

Définition 1.
Un ensemble E est une collection d'objets, ceux-ci sont appelés **éléments** de E.

> Lorsque x est un élément de E, on écrira $x \in E$ (se lit « x appartient à E »).

Dans le cas contraire on écrira $x \notin E$.

> L'ensemble vide, noté $\varnothing$, n'a pas d'élément

Ainsi $x \in \varnothing$ est oups!!!!

> Deux ensembles E et F sont dits égaux

Ssi ils ont les mêmes éléments, on écrira alors $E = F$.

> Un ensemble est présenté avec des accolades, CàD $\{...\}$.

Théorème

> Dans un ensemble, il n'y a ni ordre, ni de répétition,

CàD $\{1,3,2,1,1,3\} = \{1,2,3\}$

> Quand on rencontre un ensemble E, il faut savoir ce que cela signifie sur les éléments,

CàD il faut savoir compléter, $x \in E \iff$ .....

Exemples : Faire l'exercice 5

Par exemples

> Les ensembles de nombre : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

> Les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

> Les ensembles des fonctions de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$, noté $\mathscr{C}(\mathscr{D},\mathscr{A})$.

1.2 Inclusion, Intersection, ...

Définition 2. Opérations sur les ensembles.
Soient A et B deux ensembles

> **L'inclusion** : On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$,
Ssi tous les éléments de A sont également éléments de B, on a donc

$$A \subset B \iff \forall x,\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Vocabulaire : Quand $A \subset B$, on dit que A est une partie de B ou un sous ensemble de B.

Complément : $A \subsetneq B$ Ssi A est un sous ensemble strict de B, CàD $A \subset B$ mais $B \neq A$.

Pour démontrer que $A \subset B$

On suppose que $x \in A$

On veut démontrer $x \in B$

> **La réunion** : On note $A \cup B$ (se lit « A union B »), l'ensemble que l'on obtient en regroupant les éléments de A avec ceux de B. On a donc

$$x \in A \cup B \iff x \in A \ ou \ x \in B$$

> **L'intersection** : On note $A \cap B$ (se lit « A inter B »), l'ensemble des éléments communs à A et B. On a donc

$$x \in A \cap B \iff x \in A \ et \ x \in B$$

> **La différence** : on note $A \backslash B$ (se lit « A moins B »), l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B. On a donc

$$x \in A \backslash B \iff x \in A \ et \ x \notin B$$

Vocabulaire : Lorsque B est une partie de A, CàD $B \subset A$, l'ensemble $A \backslash B$ est appelé le complémentaire de B dans A et on le note $C_A(B)$ ou $\mathscr{C}_A(B)$

> **Le complémentaire** : On note $\mathscr{C}(A)$ ou $\mathscr{C}_E(A)$ ou $\overline{A}$,
CàD l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A et qui sont dans E.

Théorème 3. Lois de Morgan,complémentaire
Soient A, B, C des ensembles.

> **Lois de Morgan.** L'intersection de distribue sur la réunion et "réciproquement"

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

> **Avec le complémentaire**

> $\mathscr{C}_E(\varnothing) = E, \quad \mathscr{C}_E = \varnothing \quad$ et $\quad \mathscr{C}_E(\mathscr{C}_E(A)) = A.$

> $A \cup \mathscr{C}_E(A) = E \quad$ et $\quad A \cap \mathscr{C}_E(A) = \varnothing.$

> $\mathscr{C}_E(A \cap B) = \mathscr{C}_E(A) \cup \mathscr{C}_E(B) \quad$ et $\quad \mathscr{C}_E(A \cup B) = \mathscr{C}_E(A) \cap \mathscr{C}_E(B)$

Faites des patatoïdes et visualiser

1.3 Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$.

Définition 4. Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$.

Les Produit Cartésien $A \times B$ et $A \times A = A^2$

Soient A et B deux ensembles.

Le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, c'est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.

On a donc

$$(x, y) \in A \times B \iff x \in A \text{ et } y \in B$$

L'ensemble $A \times A$ est noté A^2

Remarque : Ne pas confondre parenthèse et accolade, couple et ensemble.

> *Dans le couple* $(1,2)$ *l'ordre est important,*

CàD $(1,2) \neq (2,1)$ *et il peut y avoir des répétitions, CàD* $(1,1) \neq (1)$.

> *Par contre pour les ensembles*

$\{1,2\} = \{2,1\}$, $\{1,1\} = \{1\}$ *et* $\{2,1,1,2\} = \{2,1\} = \{1,2\}$

De même on définit $A_1 \times ... \times A_n$ et $A \times A \times ... \times A = A^n$

L'ensemble des Parties $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.

On a déjà vu que A est une partie de E ou un sous ensemble de E Ssi $A \subset E$.

L'ensemble des parties de E est, noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

`La notion est subtile car : à gauche, c'est ∈ et à droite, c'est ⊂`

Exemple. Soit $E = \{1,2\}$. On va déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Pour déterminer $\mathcal{P}(E)$, il faut décrire $\mathcal{P}(E)$.

Comme E a 2 éléments, les parties ou sous ensemble de E ont : soit 0, soit 1, soit 2 éléments.

> Il y a 1 partie à 0 élément : c'est $\varnothing$.

> Il y a 2 parties à 1 élément : ce sont $\{1\}$ et $\{2\}$.

> Il y a 1 parties à 2 éléments : c'est $E = \{1,2\}$.

Conclusion : $\mathcal{P}(E) = \left\{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \underbrace{\{1,2\}}_{=E} \right\}$

2 Fonction-Injectivité-Surjectivité.

2.1 Les fonctions.

Définition 5. Définition et propriétés des fonctions.

Soit $\mathscr{D}$ et A deux ensembles.

Une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ est une correspondance
qui, à tous éléments x de $\mathscr{D}$ associe un unique élément de A noté $f(x)$.

Les fonctions numériques sont les fonctions avec $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$.
Les fonctions numériques ont le bonus d'avoir un graphe et ça aide.

Attention : les fonctions que l'on étudiera
ne sont pas à priori des fonctions numériques.

`Vocabulaire.`

> $\mathscr{D}$, c'est l'ensemble de $\mathscr{D}$épart/$\mathscr{D}$éfinition/$\mathscr{D}$omaine de la fonction f.
> l'élément $f(x) \in \mathscr{A}$, c'est la fonction f appliquée, évaluée en x.

Exemples autre que numérique.

> *Les fonctions "complexes.*

La fonction $h : z \longmapsto \dfrac{2z+3}{2z-i}$ est une fonction définie de $\mathbb{C} - \{i/2\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

> *La fonction associée à une matrice.*

Soit A une matrice de taille n, p.
La fonction associée à la matrice A, c'est la fonction, notée h_A, de $\mathscr{D} = \mathbb{R}^n$ à valeurs $\mathscr{A} = \mathbb{R}^p$ définie par

$$\forall \vec{U} \in \mathbb{R}^n, \quad h_A(\vec{U}) = A\vec{U}$$

> *Opérateur de dérivation.*

On note > $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue
> $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continument dérivable

L'opérateur de dérivation est l'opérateur/fonction, notée D, qui, à une fonction f dérivable, associe sa dérivée f'.
On a donc $\forall f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ ou bien $f : \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \longmapsto D(f) = f'$

À savoir sur des fonctions.

> La fonction f Versus Le nombre $f(x)$

Ne pas confondre : la fonction f et le nombre $f(x)$
`Vocabulaire : Le nombre` $f(x)$ `c'est la fonction évaluée/appliquée en` x.

> Si $x = 2$ alors $f(x) = f(2)$

et plus généralement : Si $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$
`Vocabulaire : On dit que` $f(2)$ `c'est l'image de 2 par la fonction` f

> L'ensemble de définition : Le nombre $f(\square)$ se calcule Ssi $\square \in \mathscr{D}$

Exemple : Le nombre $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ se calcule Ssi $\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x+1}{x-1} \leqslant 1 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$

>`Pour les propriétés de l'ensemble` $\mathscr{A}$ `et la notion d'antécédent, voir la section "Surjectivité"`

Théorème 6.
Les propriétés de la fonction f s'exprime avec $\mathscr{D}$omaine, Quantificateur et $f(x)$

Exemples Soit f une fonction numérique

> On dit que la fonction f est positive I, noté $f \geqslant 0$
Ssi

> On dit que la fonction f est croissante sur I, noté f et $\nearrow$
Ssi

> On dit que la fonction f s'annule sur I

> On dit que la fonction f ne s'annule pas sur I

> On dit que la fonction f est constante sur I

> On dit que les fonction f et g n'est pas sur I

> On dit que les fonction f et g sont égales sur I

> On dit que les fonction f et g ne sont pas égales sur I

2.2 Injectivité.

Définition 7. Définition de l'injectivité.
On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On dit que la fonction est injective Ssi

$$\forall\, (x, x') \in \mathscr{D}^2, \quad \left[f(x) = f(x') \implies x = x'\right]$$

Attention à ne pas confondre :

> la définition de l'injectivité

> et la propriété "naturelle" des fonctions, CàD $[x = x' \implies f(x) = f(x')]$

Pour démontrer que la fonction f est injective.

On suppose que $f(x) = f(x')$

On veut démontrer $x = x'$

Théorème 8. Résultats classiques

> L'interprétation/visualisation de l'injectivité avec les graphes.

> Une fonction strictement croissante est injective.

> Soit f et g des fonctions composables

$$\left.\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est injective}\\ \text{La fonction } g \text{ est injective}\end{array}\right\} \implies \text{la composée } \left[g \circ f\right] \text{ est injective}$$

$$\text{la composée } \left[g \circ f\right] \text{ est injective} \implies \left\{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est injective}\\ \\ \text{Par contre, on ne sait rien pour la fonction } g\end{array}\right.$$

> Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

Si/Lorsque la fonction f est injective

alors $\forall\, b \in \mathscr{A}$, l'équation $f(X) = b$ admet 0 ou 1 solution (dans $\mathscr{D}$).

Application : Par contraposée

Si on trouve $b_0 \in \mathscr{A}$ tel que l'équation $f(X) = b_0$ admet 2 (ou plus) solutions distinctes dans $\mathscr{D}$

Alors la fonction f n'est pas injective.

2.3 Antécédent-Image d'une fonction-Surjectivité.

Définition 9. Antécédent-Image d'une fonction.

On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

> Quand on a dit que la fonction f est à valeurs dans $\mathscr{A}$,
cela signifie que forcément $\forall\, x \in \mathscr{D},\ f(x) \in \mathscr{A}$

> On dit que $b \in \mathscr{A}$ admet un antécédent
Ssi /il existe $a_0 \in \mathscr{D}$ tel que /on peut trouver $a_0 \in \mathscr{D}$ tel que /on peut écrire/ $f(a_0) = b$
`ainsi un antécédent` a_0 `est une solution de l'équation` $f(X) = b$

> L'image de la fonction f, noté $\mathrm{Im}(f)$,
c'est l'ensemble des éléments $b \in \mathscr{A}$ qui ont un antécédent.

On a donc $b \in \mathrm{Im}(f) \iff$ Il existe a $\in \mathscr{D}$ tq $b = f(a)$
$\iff$ `On peut écrire` $b = f(a)$

À retenir.
> $b \in \mathrm{Im}(f)$ Ssi l'équation $f(X) = b$ admet une ou plusieurs solution dans $\mathscr{D}$.
> $b \notin \mathrm{Im}(f)$ Ssi l'équation $f(X) = b$ n'a pas de solution dans $\mathscr{D}$.

Définition 10. Définition de la surjectivité.

On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On dit que la fonction est surjective Ssi $\mathrm{Im}(f) = \mathscr{A}$

On sait que $\mathrm{Im}(f)$, c'est l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ effectivement atteints par f, on a donc
La fonction f est surjective
Ssi TOUS les éléments de $\mathscr{A}$ sont effectivement atteints
CàD $\forall\, y \in \mathscr{A},\ \exists\, x_{\text{qui dépend de y}} \in \mathscr{D}$ tel que $f(x) = y$

Théorème. La fonction f est surjective Ssi
Ssi pour TOUT $b \in \mathscr{A}$, l'équation $f(X) = b$ admet 1 solution ou plus dans $\mathscr{D}$.
Ssi pour TOUT $b \in \mathscr{A}$, on peut écrire $b = f(a)$

Théorème 11. Résultats classiques

> L'interprétation/visualisation de l'injectivité avec les graphes

> La fonction f est surjective
La fonction g est surjective
$\Big\} \Longrightarrow$ la composée $[g \circ f]$ est surjective

> la composée $[g \circ f]$ est surjective $\Longrightarrow \begin{cases} \text{La fonction } g \text{ est surjective} \\ \text{Par contre, on ne sait rien pour la fonction } f \end{cases}$

Exemples

> Les fonctions $Sinus$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\mathrm{Im}(Sinus) = [-1,1]$.
La fonction Sinus n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ mais est surjective sur $[-1;1]$

> Les fonctions $[X^2 : x \longmapsto x^2]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\mathrm{Im}([X^2]) = [0,+\infty[$.
La fonction X^2 n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ mais est surjective sur $\mathbb{R}_+$

> Les fonctions $[X^3 : x \longmapsto x^3]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}([X^3]) = \mathbb{R}$.
La fonction X^3 est surjective sur $\mathbb{R}$.

3 Bijection-Bijection Réciproque.

3.1 Bijection.

Définition 12. bijectivité-fonction identité.

Définition de la bijectivité.

On considère une fonction f définie de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On dit que la fonction f est bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$

Ssi la fonction f est injective **ET** surjective.

La fonction identité.

Soit E un ensemble.

La fonction "identité de E", notée id_E, est définie par : $\forall\, x \in E,\ id_E(x) = x$.

La fonction "identité de E" réalise une bijection de E sur E.

Théorème 13.

> L'interprétation/visualisation de la bijectivité avec les graphes

> Bijection et Équation.

Soit f une fonction bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$ et $b \in \mathscr{A}$.

Alors l'équation $f(x) = b$ admet une et une seule solution dans $\mathscr{D}$

> Bijection et composée. Soit f et g des fonctions composables

$$\left.\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est bijective}\\ \text{La fonction } g \text{ est bijective}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Alors la fonction } g\circ f \text{ est bijective}\\ \text{et } \left[g\circ f\right]^{-1} = \textit{Contravariant} = f^{-1}\circ g^{-1}\end{array}$$

$$\text{la composée } \left[g\circ f\right] \text{ est bijective} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est injective}\\ \text{La fonction } g \text{ est surjective}\end{array}\right.$$

> **Le Théorème de la bijection monotone.**

Soit f une fonction numérique de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}f \text{ est continue sur }]a,b]\\ f \text{ est strict croissante sur }]a,b]\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Alors la fonction } f\\ \text{réalise une bijection}\\ \text{de }]a,b] \text{ sur } \mathrm{Im}(f) = \left]f(a^+), f(b)\right]\end{array}$$

De plus Si $m \in \mathrm{Im}(f) = \left]f(a^+), f(b)\right]$

alors l'équation $f(X) = m$ admet une unique solution dans $]a,b]$.

3.2 Bijection réciproque.

Définition 14. Définition et propriétés du nombre $f^{-1}(b)$.
Soit f une fonction bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$.

$$f^{-1}(b) = \left| \begin{array}{l} \textit{l'unique solution dans } \mathscr{D} \\ \textit{de l'équation } f(X) = b \end{array} \right.$$

De plus le nombre $f^{-1}(b)$ admet les propriétés suivantes

> $f^{-1}(b)$ appartient à $\mathscr{D}$ et $f^{-1}(b)$ se calcule Ssi $b \in \mathscr{A}$

> $f^{-1}(b)$ est une solution l'équation $f(X) = b$ donc $f\left(f^{-1}(b)\right) = b$

Théorème. Pour expliciter la fonction f^{-1},
on utilise : $f(x) = y \iff \cdots \iff x = f^{-1}(y)$.

Théorème 15. Propriétés naturelles de la fonction bijection réciproque.

On suppose que f est une fonction (numérique) bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$, stric croissante, impaire

Alors la bij rec f^{-1} réalise une bijection de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{D}$, stric croissante, impaire

On suppose que f est une fonction continue, dérivable et f' ne s'annule pas

Alors la fonction bij rec f^{-1} est continue et dérivable et on a $\left[f^{-1}\right]' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Exemples : Les couples célèbres : bijections - bijection réciproques .

> Le couple : id_E, id_E.

> Le couple : ln, exp.

> Le couple : $[X^2]_{princilale}$, $\left[\sqrt{X}\right]$.

On n'est pas en φ ICI

$\tan \neq \tan_p = \tan_{principale}$

$\sin \neq \sin_p = \sin_{principale}$

> Le couple : $\tan_p$, arctan.

> Le couple : $\sin_p$, arcsin.

Théorème 16. Évident mais en fait plus subtile.

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ et g une fonction de $\mathscr{A}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$. On a

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = id_{\mathscr{D}} \\ f \circ g = id_{\mathscr{A}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Alors la fonction } f \text{ est bijective et } f^{-1} = g$$

Ce résultat est plus subtile
car il faut absolument les 2 égalités $g \circ f = id_{\mathscr{D}}$ et $f \circ g = id_{\mathscr{A}}$ pour conclure.

Complément "évident" : Soit f une fonction bijective de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$ et f^{-1} sa bijection réciproque.

> f^{-1} est bijective et $\left[f^{-1}\right]^{-1} = f$.

> D'après le définition de $f^{-1}(b)$, on a que $f^{-1}(b)$ est une solution de l'équation $f(X) = b$
Ainsi on a $\forall\, y \in \mathscr{A}$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, cela signifie $f \circ f^{-1} = id_{\mathscr{A}}$

> Comme f^{-1} est bijective, on a de façon symétrique
$\forall\, x \in \mathscr{D}$, $f^{-1}(f(x)) = x$, cela signifie $f^{-1} \circ f = id_{\mathscr{D}}$

4 Exercices

Manipulation sur les ensembles

Exercice 1. Ensemble et patatoïde.

1. On suppose que $A \subsetneq B$.
   Faites des patatoïdes et visualiser $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$ et $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$
2. On suppose que $A\cap B \neq \varnothing$.
   Faites des patatoïdes et visualiser $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$ et $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$
3. On suppose que $A\cap B = \varnothing$.
   Faites des patatoïdes et visualiser $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$ et $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$

Exercice 2. Soit $E=\{x,y,z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $x \in E$
2. $\{x\} \in E$
3. $\{x\} \subset E$
4. $\varnothing \in E$
5. $\varnothing \subset E$
6. $\{\varnothing\} \subset E$
7. $\{x,y\} \in E$
8. $\{x,y\} \subset E$
9. $\{z,y\} \subset E/\{x\}$
10. $E \subset E$
11. $E \in E$

Exercice 3. Pour les ensembles suivants compléter $x \in E \iff$ .....

$$E=\{1,3,5,7,9,,.....\},\ E=\{1,10,100,1000,.....\},\ E=\mathbb{Q}, E=[0,1[$$

Exercice 4. > "Traduire" les ensembles suivants

$\{x\in\mathbb{R} \mid x^{2n}=1\}$
$\{x\in\mathbb{C} \mid x^{2n}=1\}$
$\{x\in\mathbb{C} \mid x^{2n+1}=-1\}$
$\{x\in\mathbb{C} \mid \overline{x}=x\}$
$\{z\in\mathbb{C} \mid |z-1|=|z+1|\}$

$\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$
$\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \ et\ x-y=0\}$
$\{y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'+2y=0\}$

> Est-ce que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$? Est-ce que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
> Est-ce que l'ensemble des fonctions continues est la réunion des fonctions croissantes et des fonctions décroissantes ?

Exercice 5. [Correction] On considère

$$A=\left\{\frac{\varepsilon}{k(k+1)}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*,\varepsilon\in\{-1,1\}} \quad et\ B=\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right\}_{n,m\in\mathbb{N}^*}$$

> Recopier et compléter : $x\in A \iff \cdots$ et $x\in B \iff \cdots$

> Montrer que : $A\subset B$

Exercice 6.

1. Soit E un ensemble et A,B,C des partie/sous-ensemble de E. Montrer que : $A\cup B = A\cap B \iff A=B$
2. Montrer que
$$\left.\begin{array}{l} A\cup B = A\cup C \\ A\cap B = A\cap C \end{array}\right\} \Longrightarrow B\subset C$$

Exercice 7. On considère $E_n=\{1,2,..,n\}$.

1. On suppose que $n=4$. Lister tous les éléments de $\mathscr{P}(E_4)$
2. Combien-y-a-t-il de parties de E_n qui ont exactement 0 élément ? Combien qui ont exactement 1 élément ?
   Combien qui ont exactement 2 éléments ?

   Soit $k\in\{0,1,2,...,n\}$. Combien-y-a-t-il de parties de E_n qui ont exactement k éléments
3. En déduire qu'il y a exactement 2^n parties dans $\mathbb{E}_n$, CàD que l'ensemble $\mathscr{P}(E_n)$ admet exactement 2^n éléments.

Injection-Surjection

Exercice 8. Soit $h : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier la fonction h et faire son graphes
2. La fonction h est-elle injective ? surjective ? Déterminer $\mathrm{Im}(h)$.
3. Déterminer $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{A}_0$ tel que la fonction f réalise une bijection de $\mathscr{D}_0$ sur $\mathscr{A}_0$.

Exercice 9. [Correction] Soit la fonction h de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x,y) = (x\,e^{y}, x\,e^{-y}).$$

1. Déterminer les antécédents de $(0,0)$. Que peut-on conclure ?
2. Justifier que $(-6,6)$ n'a pas d'antécédent par h. Que peut-on conclure ?
3. Trouver des conditions sur a et b pour que (a,b) ait des antécédents. Que peut-on conclure ?

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow x+y\end{array} \qquad g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow (x+y, x-y)\end{array} \qquad h : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow (x+y, x^2-y^2)\end{array}$$

Exercice 11. [Correction] On considère les fonctions f et g de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad et \quad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{Lorsque n est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{Lorsque n est impair} \end{cases}$$

Autour de f.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
2. La fonction f est-elle injective ?
3. La fonction f est-elle surjective ?

Autour de g.

1. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$.
2. La fonction g est-elle injective ?
3. La fonction g est-elle surjective ?

Calculer

$[g \circ f](n)$ et $[f \circ g](n)$.

Que peut-on conclure ?

Exercice 12. [Correction] On considère l'opérateur de dérivation, CàD $D : f \longmapsto D(f) = f'$

1. Préciser $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de l'opérateur D.
2. Est ce que l'opérateur de dérivation est injectif ?
3. Justifier que $\mathscr{C}^0$ l'ensemble des fonctions continue appartient à $\mathrm{Im}(D)$ l'image de D.
4. À votre avis, l'opérateur de dérivation est-il surjectif ?

Exercice 13. Soit f, f_1, g, g_1 des fonctions

1. On suppose que la fonction f est injective.
   Montrer que : $f \circ g = f \circ g_1 \implies g = g_1$
2. On suppose que la fonction g est surjective.
   Montrer que : $f \circ g = f_1 \circ g \implies f = f_1$

Bijection-Bijection Reciproque.

Exercice 14. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : F \to E$ trois fonctions.

1. On suppose que : $f \circ h \circ g$ est une application surjective et que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des fonctions injectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. On suppose que : $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 15. [Correction] Soit $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ quatre ensembles. Soient $\mathscr{A} \xrightarrow{f} \mathscr{B} \xrightarrow{g} \mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{D}$ trois fonctions.
On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives.

1. Justifier sans calcul que g est bijective. On notera g^{-1} la bijection réciproque.
2. Exprimer f à l'aide de deux fonctions bijectives.
   Ainsi f est bijective.
3. Montrer que h est bijective.

Exercice 16. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E.
On suppose que :

> $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$

> f est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
   En déduire que $\forall e \in E,\ [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

5 Compléments

5.1 Fonction indicatrice.

Définition 17. Fonction indicatrice d'une partie.
Soit E un ensemble et A une partie de E, ainsi $A \subset E$.

La fonction indicatrice de la partie A, notée $\mathbf{1}_A$ est la fonction de E à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par

$$\forall\, x \in A,\ \mathbf{1}_A(x) = 1 \quad et \quad \forall\, x \notin A,\ \mathbf{1}_A(x) = 0$$

5.2 Restriction.

Définition 18. Restriction d'une fonction à une partie.
Soit E un ensemble et E' une partie de E, ainsi $E' \subset E$.
Soit f une fonction de E à valeurs dans $\mathscr{A}$.

La restriction de f à E', notée $f_{|E'}$, est la fonction

$$\forall\, x \in E',\ f_{|E'}(x) = f(x) \quad et \quad \forall\, x \notin E',\ f_{|E'}(x) = N'est\ PAS\ défini$$

Exemple. La fonction tan N'est PAS bijective mais $\tan_{\left|{}_{]-\pi/2,\pi/2[}\right.} = \tan_P$ est réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$

Et la fonction arctan est la bijection réciproque de $\tan_{\left|{}_{]-\pi/2,\pi/2[}\right.}$

5.3 Image direct et Image réciproque d'une partie.

Définition 19.
Image directe d'une partie de $\mathscr{D}$

On considère une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.
Soit $E \subset \mathscr{D}$ une partie de $\mathscr{D}$.

L'image directe de E, noté $f\langle E\rangle$ ou $f(E)$, c'est l'ensemble

$$\begin{aligned} f\langle E\rangle &= \{y \in \mathscr{A}\ tel\ que\ \exists x \in E\ avec\ y = f(x)\} \\ &= c'est\ l'ensemble\ des\ valeurs\ atteintes\ avec\ les\ éléments\ de\ E \end{aligned}$$

Conclusion : $y \in f\langle E\rangle$ alors on peut écrire $y = f(x)$ avec un certain $x \in E$.

Image réciproque d'une partie de $\mathscr{A}$

On considère une fonction f de $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.
Soit $F \subset \mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{A}$.

L'image réciproque de F, noté $f^{-1}\langle F\rangle$ ou $f^{-1}(F)$, c'est l'ensemble

$$f^{-1}\langle F\rangle = \{x \in \mathscr{D}\ tel\ que\ f(x) \in F\}$$

Conclusion : $x \in f^{-1}\langle F\rangle \iff f(x) \in F$.