Programme de colle de la semaine 8

du Lundi 16 Novembre au Vendredi 20 Novembre.

Questions de cours :

> L'ensemble $\mathscr{P}(E)$

Définition de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Soit $E = \{1,2,3\}$. Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}(E)$

Soit $E = \{1,2,...,n\}$. Justifier que l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ a 2^n parties/éléments Plus difficile, il y a la correction en page 2

> Injectivité, logique et équation.

Donner la définition de injective et la définition de injective avec la contraposée.

Expliquer l'injectivité avec des patatoides.

Expliquer l'injectivité sur le graphe fonction.

Donner la définition de non-injective et un exemple justifier de fonction non-injective

> Les fonctions strictement croissante sont injectives.

Donner la définition de l'injectivité.

Donner la définition de la fonction f est croissante.

Démontrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ strictement croissante est injective.

> Propriétés de l'injectivité.

Signification de $g \circ f$

Démontrer que

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est inj} \\ g \text{ est inj} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \ inj \quad et/ou \quad g \circ f \text{ est inj} \Longrightarrow \text{f est inj}$$

> Définition de im(f) et la surjectivité.

Expliquer ce que signifie : "à valeurs dans $\mathscr{A}$".

Définir l'ensemble $\mathrm{Im}(f)$.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + {}^1/_x$

Donner le tableau de signe/variation de la fonction f et faire son graphe.

Expliquer comment on en déduit : $\mathrm{Im}(f)$, inj, surj et bij

> Propriétés de la surjectivité.

Compléter et démontrer que

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est surj} \\ g \text{ est surj} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ est surj} \qquad et \qquad g \circ f \text{ est surj} \Longrightarrow \text{ g est surj}$$

> Bijection et équation. On suppose que la fonction f réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{A}$

Définition de f la fonction f est bijective.

Justifier que, pour tout $b \in \mathscr{A}$, l'équation $f(X) = b$ admet une unique solution dans $\mathscr{D}$

Application 1 : Justifier que pour tout n, il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $x^n + x - 1 = 0$

Application 2 : Justifier que pour tout n, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x + \sin(x) = n$

> Bijection réciproque.

Définition et les exemples célèbres.

Propriété du couple bijection-bijection réciproque.

Comment calculer la bijection réciproque.

> Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{A}$ une fonction et $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ deux fonctions

Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f = id_{\mathscr{D}} \\ f \circ g = id_{\mathscr{A}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Alors la fonction } f \text{ est bijective} \\ \text{et } f^{-1} = g \end{array}$$

Exercices.

Je sais c'est pas très fun. Des calculs autour des injection/surjection/bijections/Bijection réciproque

Soit $E = \{1, 2, ..., n\}$. Justifier que l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ a 2^n parties/éléments

On sait que : $A \in \mathscr{P}(E)$ Ssi A est une partie/un sous-ensemble de E

> Pour fabriquer une partie de E avec exactement p éléments,

Je choisis p éléments dans $E = \{1, 2, ..., n\}$. *Conclusion : Il y a* $\binom{n}{p}$ *possibilités*

> Le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(E)$ est égale au nombre de partie avec 0 élément

PLUS le nombre de partie avec 1 élément

PLUS le nombre de partie avec 2 élément

PLUS le nombre de partie avec 3 élément, ...etc...

Conclusion : le nombre de partie de E ou le nombre d'élément de $\mathscr{P}(E)$

est égale à $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

> Enfin on a $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \square^k \qquad avec \square = ...$$

$$= (1 + \square)^2$$

$$= (1 + 1)^n = 2^n$$

—— Une injectivité originale et difficile ——

Montrer que la fonction : $f : (a, b) \longmapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

> Définition de $x \in \mathbb{Q}$.

On a : $x \in \mathbb{Q} \iff$ On peut écrire $x = \pm\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

$\iff$ *Il existe* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $x = \pm\dfrac{a}{b}$

> Démonstration de : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors : n^2 est pair $\implies$ n pair

On fait un RA. On suppose que : n^2 est pair et n n'est pas pair

Comme n est un entier et n n'est pas pair, donc n est impair et on peut écrire : $n = 2k + 1$

Ainsi on $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 1 + 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{Entier}$ est impair

Conclusion : n^2 est pair et n^2 est impair OUPS

> Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On fait pas un RA

On suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et que a et b ne sont pas tous les deux pairs!!!!

Comme $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \implies b\sqrt{2} = a \implies 2b^2 = a^2$

Donc a^2 est pair ainsi a pair. Voir ci dessus

On a donc $a = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$

Ainsi $2b^2 = a^2 \implies 2b^2 = (2p)^2 \implies b^2 = 2p^2$

Donc b^2 est pair ainsi b pair.

Conclusion : a et b sont tous les deux pairs OUPS!!!!!

> Montrer que la fonction : $f : (a,b) \longmapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \iff a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}$

On suppose que : $f(a,b) = f(a',b')$

On va montrer que $a = a'$ et $b = b'$

On sait que : $f(a,b) = f(a',b')$ signifie $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$.

On va montrer par un RA que $b = b'$.

On suppose que $b \neq b'$.

On a ainsi $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies \cdots \implies \sqrt{2} = \dfrac{a' - a}{b - b'}$

C'est légitime car $b - b' \neq 0$ donc $\sqrt{2} = \dfrac{a' - a}{b - b'} \in \mathbb{Q}$ OUPS

Donc $b = b'$

De plus on a maintenant $a + b\sqrt{2} = a' + b\sqrt{2} \implies a = a' + b\sqrt{2} - b\sqrt{2} = a'$

Donc $a = a'$