TD 9 Équations différentielles

Vendredi 13 Novembre 2026.

Exercice 1. [Correction] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall x, y \in]0,+\infty[, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x) \qquad (E)$$

1. Calculer les valeurs possible de $f(1)$.
2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie la relation (E)
   (a) On note $\alpha = f'(1)$.
   Démontrer que : $\forall t \in]0,+\infty[, \quad tf'(t) - f(t) = \alpha t$
   (b) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathscr{D} =]0,+\infty[$
   (c) Trouver les fonctions f qui sont solutions du problème.
3. On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)
   Comme la fonction f est continue alors elle admet des primitives.
   On note H l'une d'elle.
   En primitivant (E), montrer que f, CàD $f(t)$, s'exprime en fonction entre autre de $H(t)$.
   En déduire que la fonction f est dérivable, ainsi les conclusions de la question Q2c. restent valides.

Exercice 2. [Correction] Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x > 0 \quad et \quad f(1) = 1$$

1. Montrer que : pour tout $t > 0$, $t^2 f''(t) + f(t) = 0$.
2. On considère la fonction g définie par $g : u \longmapsto (u) = f\left(e^u\right)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de g
   et montrer que g est solution de l'équation différentielle $g'' - g' + g = 0$.
   (b) Déterminer g.
3. Déterminer f.

Exercice 3. [Correction] Dans tout l'exercice, les solutions cherchées sont des fonctions à valeurs réelles.
On étudie l'équation "différentielle"

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(-x) = x + \cos x \qquad (E)$$

1. Soit l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \cos x \qquad (E_1)$
   (a) Vérifier que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x$ est une solution particulière de (E_1)
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_1)
   (c) Parmi les fonctions solutions (E_1), déterminer celles qui sont paires et celles qui sont impaires
2. Soit l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x \qquad (E_2)$
   (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_2)
   (b) Parmi les fonctions solutions, déterminer celles qui sont paires et celles qui sont impaires
3. Complément sur les fonctions. Cette question est difficile mais intéressante.
   (a) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
   Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (u, v) telles que u soit paire, v soit impaire et $\phi = u + v$
   On prendra soin de rédiger séparément les argumentations assurant l'existence et l'unicité.
   On dit que u est la partie paire et v la partie impaire de f.
   (b) Soit u_1 et u_2 deux fonctions paires. Soit v_1 et v_2 deux fonctions impaires.
   Déduire de la question précédente que : $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ \text{ET} \\ v_1 = v_2 \end{cases}$
4. Soit f une solution de (E), u sa partie paire et v sa partie impaire.
   (a) Vérifier que u'' est paire et que v'' est impaire
   (b) Former une équation différentielle dont u est solution, former une équation différentielle dont v est solution.
   (c) Préciser l'ensemble des solutions de (E).

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in]0,+\infty[, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad (E)$$

1. Calculer les valeurs possible de $f(1)$.

   J'applique l'égalité avec $x = 1 > 0$ et $y = 1 > 0$

   Ainsi on a : $f(1) = f(1) + f(1)$

   $$\Longrightarrow f(1) = 0$$

2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie la relation (E)

   (a) Démontrer que : $\forall\, t \in]0,+\infty[, \quad tf'(t) - f(t) = \alpha t$

   Je fixe y et je dérive l'égalité en x

   $$\text{Ainsi } \frac{d}{dx}\left[f(xy)\right] = \frac{d}{dx}\left[xf(y) + yf(x)\right]$$
   $$\Longrightarrow \forall\, x, y > 0,\ y\ f'(xy) = f(y) + yf'(x)$$

   On applique cette égalité avec $x = 1 > 0$ et $y = t > 0$, ainsi

   $$t\ f'(t) = f(t) + tf'(1)$$
   $$\text{On a bien } t\ f'(t) - f(t) = \alpha t$$

   (b) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathscr{D} =]0,+\infty[$

   > C'est une EDL1 complète

   > Solution Homogène

   On résout ur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation : $th' - h = 0 \iff h' - \frac{1}{t}h = 0$

   On a $a(t) = -\frac{1}{t}$ et une primitive $A(t) = -\ln|t|$

   $$\text{On sait que : } \forall\, t > 0,\ h(t) = K.e^{\ln|t|} = K.t$$

   > Solution particulière

   On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = K(t).t$

   $$y_p'(t) = K'(t).t + K(t)$$

   Ainsi on a : $ty_p'(t) - y_p(t) = \alpha \iff t\left[K'(t).t + K(t)\right] - K(t).t = \alpha t$

   On a donc : $\forall\, t > 0,\ K'(t).t^2 = \alpha t \iff K'(t) = \alpha\frac{1}{t}$

   $$\text{On choisit } K(t) = \alpha\ln|t| \text{ et } y_p(t) = \alpha t\ln|t|$$

   Conclusion : $\forall\, t > 0,\ y(t) = y_p(t) + h(t) = \alpha t\ln(t) + K.t$

   (c) Trouver les fonctions f qui sont solutions du problème.

   On sait que : f est solution vérifie l'équation diff et $f(1) = 0$

   On a donc $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha t\ln(t) + K.t$ et $f(1) = 0$

   Ainsi $f(1) = 0 \iff 1\ln(1) + K.1 = 0$ donc $K = 0$

   Conclusion : les solutions f du problème sont de la forme : $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha t\ln(t)$

   Il faut encore vérifier que ces fonctions conviennent

   POur $x, y > 0$, on a $f(xy) = \alpha(xy)\ln(xy) = \alpha xy\ln(x) + \alpha xy\ln(y) = yf(x) + xf(y)$

   Conclusion : les fonction $f : t \longmapsto \alpha t\ln(t)$ conviennent, ce sont les solutions du problème.

3. On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)

   En primitivant (E), montrer que f, CàD $f(t)$, s'exprime en fonction entre autre de $H(t)$.

   On sait que $\forall\, x, y > 0,\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

   On primitive par rapport à x, ainsi on on a $\forall\, x, y > 0,\ \frac{H(xy)}{y} = \frac{x^2}{2}f(y) + yH(x)$.

   On applique avec $x = 1 > 0$ et $y = t > 0$

   ainsi $\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{2}f(t) + tH(1)$

   $$\text{On ré-organise, ainsi } \forall\, t > 0,\ f(t) = 2\left[\frac{H(t)}{t} - tH(1)\right]$$

   En déduire que la fonction f est dérivable, ainsi les conclusions de la question Q2c. restent valides.

   Comme H est dérivable, la fonction f s'exprime à l'aide fonction dérivable

   donc h est dérivable et les conclusions de la question Q2c. restent valides.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit f une fonction de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$\begin{cases} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x>0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1. Montrer que : pour tout $t>0$, $t^2 f''(t)+f(t)=0$.

   $>$ On sait que : $\forall x>0,\ f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   $>$ On dérive cette égalité $\frac{d}{dx}[...]=\frac{d}{dx}[...]$,

   Ainsi $\forall x>0,\ f''(x)=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

   $>$ On applique avec $\frac{1}{x}>0$, l'égalité $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

   Conclusion : $f'\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$, on a donc $\forall x>0,\ f''(x)=\frac{-1}{x^2}f(x)$

2. On considère la fonction g définie par $g(u)=f\left(e^u\right)$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de g

   On peut calculer le nombre $g(u)$ Ssi $e^u \in D_f=]0,+\infty[$ Donc pas de problème car $e^{\square}>0$.

   Donc g est def, C^0 et même C^∞ sur $\mathbb{R}$

   Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire.

   On a $g(u) = f\left(e^u\right)$

   $$\Rightarrow g'(u)=\left[f\left(e^u\right)\right]'=e^u f'\left(e^u\right) \text{ et } g''(u)=\left[e^u f'\left(e^u\right)\right]'=e^u f'\left(e^u\right)+\left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right)$$

   On a donc

   $$A\ g''(u)+B\ g'(u)+C\ g(u)=A\left(e^u f'\left(e^u\right)+\left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right)\right)+B\ e^u f'\left(e^u\right)+C\ f\left(e^u\right)$$

   $$=A\ \left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right)+(A+B)\ e^u f'\left(e^u\right)\ +C\ f\left(e^u\right)$$

   Je choisis $A=1$ et $A+B=0$ et $A=C$

   $$=\left(e^u\right)^2 f''\left(e^u\right)+\ f\left(e^u\right)=0$$

   Car c'est l'équa diff de Q1 avec $t=e^u$.

   (b) Déterminer g.

   La fonction g est solution l' EDL2 homogène : $1\ g''(u)+(-1)\ g'(u)+1\ g(u)=0$

   Donc on sait trouver g

3. Déterminer f.

   On sait que $\forall u\in\mathbb{R},\ f\left(e^u\right)=g(u)$, on applique avec $u=\ln x$ ainsi $f(x)=g(\ln x)$

   Comme la résolution est longue, on a fait des $\Longrightarrow$

   donc il faut vérifier celles qui effectivement vérifient : $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(1)=1$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Dans tout l'exercice, les solutions cherchées sont des fonctions à valeurs réelles. Cela n'interdit pas la considération de fonctions à valeurs complexes comme intermédiaire de calcul.
On étudie l'équation de type différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(-x) = x + \cos x \qquad (E)$$

Je dis de type différentielle à cause du $f(-x)$.

1. Soit l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \cos x \qquad (E_1)$
   (a) Facile.
   (b) Les solution de (E_1) sont la somme d'une solution particulière (cf ci dessus) et de la solution générale de l'ESSM. On trouve au final

$$\text{Il existe } \alpha, \beta \text{ tel que } \forall x,\ y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

   (c) Paires-impaires

   → Une solution est paire Ssi

$$\forall x, \quad y(-x) = \frac{1}{2}(-x)\sin(-x) + \frac{1}{2}\cos(-x) + \alpha\cos(-x) + \beta\sin(-x)$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2}\cos x + \alpha \cos x - \beta \sin x$$

$$= \ldots = y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2}\cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

   Ssi $\beta = 0$ (le sens $\Leftarrow$ est évident, le sens $\Rightarrow$ est facile avec $x = \frac{\pi}{2}$)

   Donc y est paire et solution de $(E_1) \Leftrightarrow \exists \alpha$ tq
   $\forall x,\ y(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2}\cos x + \alpha \cos x$

   → Une solution est impaire Ssi

$$\forall x, \quad y(-x) = \frac{1}{2}(-x)\sin(-x) + \frac{1}{2}\cos(-x) + \alpha\cos(-x) + \beta\sin(-x)$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2}\cos x + \alpha \cos x - \beta \sin x$$

$$= \ldots = -y(x) = -\frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2}\cos x - \alpha \cos x - \beta \sin x$$

   Cette dernière égalité est impossible pour **TOUT les** x donc il n'y a pas de fonction impaire solution de (E_1)

2. Soit l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - y(x) = x \qquad (E_2)$
   (a) Les solution de (E_2) sont la somme d'une solution particulière $[x \mapsto -x]$ et de la solution générale de l'ESSM. On trouve au final

$$\text{Il existe } \lambda, \mu \text{ tel que } \forall x,\ y(x) = -x + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$$

   (b) Paires-impaires

   → Une solution est paire Ssi

$$\forall x, \quad y(-x) = -x + \lambda e^{-x} + \mu e^{+x}$$

$$= \ldots = y(x) = x + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$$

   Cette dernière égalité est impossible pour **TOUT les** x donc il n'y a pas de fonction paire solution de (E_2)

→ Une solution est impaire Ssi

$$\forall x, \quad y(-x) = -x + \lambda e^{-x} + \mu e^{+x}$$

$$= \ldots = -y(x) = -x - \lambda e^{x} - \mu e^{-x}$$

Ssi $\mu = -\lambda$ (le sens $\Leftarrow$ est évident, le sens $\Rightarrow$ est facile avec $x = 0$)

Donc y est impaire et solution de $(E_2) \Leftrightarrow \exists \lambda$ tq

$$\forall x,\ y(x) = -x + \lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

3. Complément sur les fonctions
   A méditer.
4. Soit f une solution de (E), u sa partie paire et v sa partie impaire.
   (a) On sait que u est paire, ainsi $\forall x,\ u(-x) = u(x)$.

   On dérive deux fois cette égalité
   et on utilise $u(-x) \rightsquigarrow (-1)\, u'(-x) \rightsquigarrow (-1)(-1)\, u''(-x)$

   De même avec v.
   (b) On sait que $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$. On écrit $f = u + v, i.e. \forall x,\ f(x) = u(x) + v(x)$. On a ainsi

$$\forall x,\ u''(x) + v''(x) + u(-x) + v(-x) = x + \cos x$$

Or u est paire et v est impaire

$$\Longrightarrow \underbrace{u''(x) + u(x)}_{\text{fonction paire}} + \underbrace{v''(x) - v(x)}_{\text{fonction impaire}} = \underbrace{x}_{\text{fonction impaire}} + \underbrace{\cos x}_{\text{fonction paire}}$$

Donc$_{\text{En fait } \Leftrightarrow}$ on a

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \cos x \\ v''(x) - v(x) = x \end{cases}$$

   (c) Conclusion : $f = u + v$ est une solution de $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$ Ssi u est une solution paire de (E_1) et v une solution impaire de (E_2)

$$\begin{array}{ll} \text{Donc} & \exists \alpha,\ \forall x, \quad u(x) = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x \\ & \text{et} \\ & \exists \lambda,\ \forall x, \quad v(x) = x + \lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right) \end{array}$$

Ainsi Il existe α, λ tel que

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall x,\ f(x) & = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \alpha \cos x + x + + \lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right) \\ & = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} \cos x + x + \lambda\left(e^{x} - e^{-x}\right) + + \alpha \cos x \end{array}}$$