Le corps des nombres réels

Les suites de nombres réels

1. Le vocabulaire des suites

Définition, notation d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$, exemples des suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques. Suites constantes et stationnaires ; suites extraites ; suites et relation d'ordre : suites majorées, minorées, croissantes,. . .Exemples.

2. Suites convergentes ; notion de limite

Suites convergentes : définition et unicité de la limite ; suites divergentes. Exemples. Toute suite convergente est bornée ; une suite convergeant vers un réel strictement positif est majorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.
Suites tendant vers l'infini.
Caractère asymptotique de la notion de limite ; suite extraite d'une suite convergente. Application à la démonstration de la divergence d'une suite. Cas des suites extraites paires et impaires.
Caractérisation séquentielle de la densité et des bornes supérieures et inférieures.

3. Opérations sur les limites

Résultats usuels sur les limites de sommes, de produits de suites admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Questions de cours

Q1. `[facultative]` Démontrer que de toute suite réelle, on peut extraire une suite monotone.

Q2. Démontrer que toute suite convergente est bornée.

Q3. Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, de la borne inférieure et de la densité.

Q4. Démontrer que le produit de deux suites convergentes est convergente et donner la valeur de la limite *(on prouvera que le produit d'une suite convergente et d'une suite bornée converge vers 0 !).*

Q5. Si la suite $x = (x_n)$ est minorée par m et que $y = (y_n)$ tend vers $+\infty$, donner et démontrer les limites des suites $x + y$ et $x \times y$ *(on pourra/devra donner une condition supplémentaire sur m).*

Q6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = +\infty$, à l'aide d'une méthode de monotonie-intégrale.

Q7. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = +\infty$, à l'aide de suites extraites.

Q8. Démontrer que si les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) tendent vers la même limité $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite (x_n) tend vers ℓ.

Q9. Si f est une application continue, croissante sur un segment $I = [a, b]$ et vérifie $f(I) \subset I$, alors toute suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, converge. Caractériser les limites possibles de la suite.

Q10. Si f est une application continue, décroissante sur un segment $I = [a, b]$, vérifie $f(I) \subset I$ et telle que $f \circ f$ admet un unique point fixe sur I, alors toute suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, converge.
(On utilisera la question 9)

À venir : suite à valeurs réelles encore, limites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.