Suites de nombres réels

1. Le vocabulaire des suites

2. Suites convergentes ; notion de limite

3. Opérations sur les limites

4. Relations de comparaison

1. Domination : Définitions quantifiées, notations de Landau, traduction à l'aide d'un produit de suites, propriétés, opérations.
2. Négligeabilité : Définitions quantifiées, notations de Landau, traduction à l'aide d'un produit de suites, propriétés, opérations.
3. Équivalence : définition quantifiée, traduction à l'aide d'un produit de suites. Convergence et équivalence ; application aux suites qui ne s'annulent pas, aux suites strictement positives.
Obtention d'équivalents à l'aide de la dérivabilité d'une fonction. Exemples de $\sin(1/n)$, $\ln(1+1/n)$ etc.
4. Suites de références comparaisons de $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $((\ln n)^\beta)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Exemples de recherches de développements asymptotiques

5. Théorèmes d'existence des limites

1. Théorèmes d'encadrement.
2. Suites monotones : convergence d'une suite croissante majorée. Exemples.
3. Segments emboités. Définition, propriétés, exemples.
4. Suites adjacentes. Définition, propriétés, exemples.
5. Suites dichotomiques : définitions et propriétés, application à la recherche d'un zéro.
6. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Preuve à l'aide de suites dichotomiques. Deuxième preuve en montrant avant que de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite monotone.

Questions de cours

Q1. Montrer que $x_n = O(y_n)$ si et seulement si il existe une suite (b_n) telle que ....

Q2. Montrer que $x_n = o(y_n)$ si et seulement si il existe une suite (ε_n) telle que ...

Q3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$ si et seulement si il existe une suite (α_n) tels que...

Q4. Liste d'équivalents à connaître et à savoir justifier : $\sin(\frac{1}{n})$; $\tan(\frac{1}{n})$; $\arcsin(\frac{1}{n})$; $\arctan(\frac{1}{n})$; $\mathrm{sh}(\frac{1}{n})$; $\mathrm{th}(\frac{1}{n})$; $e^{\frac{1}{n}}-1$; $\ln(1+\frac{1}{n})$; $(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1$.

Q5. Donner et justifier les équivalents de $\cos(\frac{1}{n})-1$ et de $\mathrm{ch}(\frac{1}{n})-1$

Q6. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Q7. Déterminer un équivalent de $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ (*méthode de monotonie-intégrale*).

Q8. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = a \text{ et } u_1 = b \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}\end{cases}$, à l'aide de la suite auxiliaire $v_n = u_n - u_{n-1}$.

Q9. Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Q10. Énoncer et démontrer les résultats sur les limites des suites réelles croissantes.

Q11. `[facultative]` Écrire une fonction Python de recherche d'un zéro par dichotomie d'une fonction continue à `eps` près. Il faut savoir expliquer la méthode ainsi que la vitesse de convergence. *(l'existence du zéro, conséquence des valeurs intermédiaires est admise)*

Q12. Énoncer et démontrer le théorème des segments emboités.

Q13. Énoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.

Q14. `[facultative]` Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites à valeurs réelles par la méthode de la dichotomie.

À venir : suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, limites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, relations de comparaison.