

Suites de nombres réels

Suites de nombres complexes

Définition d'une suite à valeurs complexes; convergence; opérations sur les limites; lien avec les suites parties réelle et imaginaire; suite extraite, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Révision : Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles et fonctions usuelles

Limites d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

I. Limites définition d'une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$; unicité; exemples. Limites infinies. Propriété vérifiée par une fonction au voisinage de a . Caractère local de la notion de limite. Application aux propriétés locales d'une fonction ayant une limite finie. Applications : si $|f - \lambda|$ est majorée au voisinage de a par une fonction g qui tend vers 0 en a , alors f admet pour limite λ en a ; si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a ; si de plus cette limite vérifie $m < \lambda < M$, alors on a $m < f < M$ au voisinage de a .

Limites à gauche et à droite en $a \in I$: définitions; f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en a et si ces limites coïncident.

II. Opérations et limites : somme, produit, quotient de fonctions ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Composition : limite de la composée d'une fonction et d'une suite. Caractérisation séquentielle de la limite. Limite et composition de fonctions.

III. Limites et relations d'ordre sur \mathbb{R} : si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , relation entre les limites -si elles existent- de f et g . Théorèmes d'encadrement. Limite aux bornes de fonctions monotones.

IV. Limites de références : croissances comparées et limites classiques en 0.

Questions de cours

Pour chaque démonstration avec $a, b, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, l'examinateur-trice précisera un ou deux cas de son choix à traiter.

Q.1 Admettant le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites à valeurs réelles, le démontrer pour les suites à valeurs complexes.

Q.2 Limite de la somme de deux fonctions ayant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Q.3 Limite d'un produit de fonctions ayant une limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Q.4 Limite en a du produit $f(x) \times g(x)$ dans le cas où g est majorée par un réel $m < 0$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f tend vers $+\infty$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Q.5 Limite de la composée de deux fonctions.

Q.6 [facultative] Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.

Q.7 Limites aux bornes d'une fonction monotone sur un intervalle $]a; b[$.

L'examinateur-trice demandera un cas de son choix : croissante ou décroissante, en a ou en b , ces derniers appartenant à \mathbb{R} ou non.

À venir : relations de comparaison, continuité sur un intervalle puis polynômes.