

Révision d'analyse :

les exercices de la semaine porteront sur les suites, limites, relations de comparaison et la continuité.

Polynômes à une indéterminée

I. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

Structure de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (suites à support fini) : de \mathbb{K} -espace vectoriel ; produit et structure d'anneau. Composition, indéterminée X , notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, calculs.

Degré d'un polynôme : définition et propriétés. $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$; polynômes associés ; ensembles des diviseurs, des multiples d'un polynôme. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$, algorithme. Exemples.

II. Fonctions polynomiales

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Evaluation de la valeur d'une fonction polynomiale en un point : comparaison d'algorithmes : « naïf », sans recalculer les puissances et de celui de Horner.

Dérivation des polynômes, des fonctions polynomiales, dérivées successives. Formules de Leibniz et de Taylor.

III. Racines d'un polynôme

1. Définition, caractérisation à l'aide de la divisibilité, cas de p racines distinctes, exemples. Nombre maximal de racines distinctes d'un polynôme non nul. Applications au morphisme $P \mapsto \tilde{P}$, à l'unicité des polynômes de Tchebychev. Polynômes interpolateurs de Lagrange.

2. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives. Nombre maximal de racines (en comptant leur multiplicité) d'un polynôme non nul.

3. Relations coefficients/racines : polynômes scindés, fonctions symétriques. Exemples.

Questions de cours

Q.1 Définition du produit de deux polynômes, preuve de l'associativité.

Q.2 Définition du produit de deux polynômes, élément neutre et preuve de la distributivité par rapport à l'addition.

Q.3 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$: énoncé et démonstration

Q.4 [facultatif] Écriture Python d'algorithmes d'évaluation d'un polynôme en un point : naïf, sans recalculer les puissances et à l'aide de la méthode de Horner. Estimation du nombre d'opérations.

Q.5 Démontrer la formule de Leibniz donnant $(P \times Q)'$ pour les polynômes (avec des calculs polynomiaux, sans passer par les fonctions).

Q.6 Démontrer la formule de Leibniz donnant $(P \times Q)^{(n)}$ pour les polynômes (en utilisant - et en justifiant cette utilisation- le résultat sur les fonctions).

Q.7 Démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Q.8 Interpolation de Lagrange : exposition de la question, existence, expression et unicité du polynôme interpolateur.

Q.9 Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives : énoncé et démonstration.

Q.10 Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

À venir : arithmétiques des polynômes, décomposition des fractions rationnelles, algèbre linéaire .