Polynômes à une indéterminée

I. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

II. Fonctions polynomiales

III. Racines d'un polynôme

4. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: théorème fondamental de d'Alembert-Gauss, irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, décomposition primaire. Exemple de $X^n - 1$.

5. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: conjugaison des polynômes et racines, conjugué d'une racine non réelle ; irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, décomposition primaire.

IV. Arithmétique

1. PCGD : définition par le degré maximal parmi $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, propriétés et définition de $A \wedge B$.

   Propriétés de l'idéal $A.\mathbb{K}[X] + B.\mathbb{K}[X]$, autre définition de $A \wedge B$, relations de Bezout, algorithme d'Euclide.
2. PPCM : propriétés de l'idéal $A.\mathbb{K}[X]$, définition de $ppcm(A, B) = A \vee B$.
3. Polynômes premiers entre eux, théorème de Bezout, lemme de Gauss, lien entre $A \times B$, $A \wedge B$ et $A \vee B$.
4. Extension aus cas d'un nombre fini de polynômes : pgcd, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, théorème de Bezout.

Remarque : la notion d'idéal n'est pas au programme.

Fractions rationnelles *(résultats essentiellement pratiques)*

Définition, opérations sur les fractions rationnelles. Identification entre fractions et fonctions rationnelles. Représentant irréductible, unitaire.
Degré d'une fraction rationnelle, partie entière.
Racines et pôles : ordre de multiplicité, partie polaire relative à un pôle.
Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (admise).
Valeur du coefficient lié à $\frac{1}{(X-\alpha)^r}$ dans le cas d'un pôle d'ordre r *(on notera que seul le cas $r = 1$ est au programme).*
Exemples de décomposition et d'astuces de calcul des coefficients (utilisation de la parité éventuelle, de la limite de $xF(x)$, valeurs en des points remarquables...).

Questions de cours

Q.1 Interpolation de Lagrange : exposition de la question, existence, expression et unicité du polynôme interpolateur.

Q.2 Déterminer (en le justifiant) les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Q.3 Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^5 + 32$.

Q.4 `[facultatif]` Soit $I = A.\mathbb{K}[X] + B.\mathbb{K}[X]$.
Démontrer qu'il existe un unique $D \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $I = D.\mathbb{K}[X]$.

Q.5 En utilisant la question précédente, donner une définition et les principales propriétés du PGCD de A et B.

Q.6 `[facultatif]` Soit $J = A.\mathbb{K}[X] \cap B.\mathbb{K}[X]$.
Démontrer qu'il existe un unique $M \in \mathbb{K}[X]$unitaire tel que $I = M.\mathbb{K}[X]$.

Q.7 En utilisant la question précédente, donner une définition et les principales propriétés du PPCM de A et B.

Q.8 Théorème de Bezout, lemme de Gauss dans $\mathbb{K}[X]$ (énoncés et démonstrations).

Q.9 Si P est un polynôme scindé, décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Q.10 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $F(X) = \frac{1}{X^n - 1}$.

Q.11 Décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ de $F(X) = \frac{X^4+1}{(X-2)^2(X-1)}$.

Q.12 Décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ de $F(X) = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$.

À venir : espaces vectoriels (part 1).