Espaces vectoriels

I. Structure d'espace vectoriel

1. **Définition :** espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, vecteurs, scalaires.
2. **Exemples.**
3. **Règles opératoires :** relations entre loi externe et interne, sommation.
4. **Combinaisons linéaires :** définition, symbole de Kronecker, CNS pour qu'un vecteur d'une famille soit combinaison linéaire des autres. Familles libres, liées, exemples .

II. Sous-espace vectoriel

1. **Définition et premières propriétés :** définition, méthode pratique pour prouver que V est un s.e.v de E. Exemples dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. **Intersection de sous-espaces vectoriels :** l' intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. cas de la réunion.
3. **Sous-espace vectoriel engendré par une partie :** définition et description de $\mathrm{Vect}(P)$, cas où P est une famille finie de E, familles génératrices. Exemples.
4. **Somme de sous-espaces vectoriels :** définition de la somme de n s.e.v., notation $\overset{n}{\underset{i=1}{+}} V_i$.

   Notion de somme directe, notation $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Unicité de la décomposition. Concaténation de familles libres.

   Cas particulier de deux sous-espaces. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, notation $E = V \oplus W$, existence et unicité de la décomposition d'un vecteur.

III. Applications linéaires (E, F, G $\mathbb{K}$-espaces vectoriels)

1. **Définition et premières propriétés :** application linéaire, endo/iso/auto-morphisme, ensembles $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire. Exemples. Forme linéaire.
2. **Composée et réciproque :** composée d'applications linéaires, linéarité de f^{-1}. $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe.
3. **Image directe et réciproque :** image directe et réciproque d'un s.e.v par une application linéaire. Noyau, image de f. C.N.S. pour que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ soit une injection.
4. **Structures de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\mathcal{L}(E)$.**

IV. Des éléments particuliers de $\mathcal{L}(E)$

Homothéties, projecteurs et symétries. Définition de la projection sur un s.e.v parallèlement à un s.e.v supplémentaire : c'est un projecteur. Idem avec les symétries. Propriétés.

Questions de cours

Q1. Si U et V sont deux s.e.v. de E, alors $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Q2. Si U et V sont deux s.e.v. de E, alors $U + V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Q3. Démontrer que $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $W = \{(\alpha,\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. de $E = \mathbb{R}^3$.

Q4. Avec les notations de la question précédente, démontrer que $E = V \oplus W$.

Q5. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Q6. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Q7. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et U est un s.e.v. de E, alors $f(U)$ est un s.e.v. de F.

Q8. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et V est un s.e.v. de F, alors $f^{-1}(V)$ est un s.e.v. de E.

Q9. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est une injection de E dans F si et ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.

Q10. `[facultatif]` Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et si W est un s.e.v de E supplémentaire de $\ker(f)$ dans E, alors W est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

Q11. Définir la projection vectorielle sur V parallèlement à W et montrer qu'elle est linéaire et que c'est un projecteur.

Q12. Si p est un projecteur vectoriel de E (i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$), alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et $x \in \mathrm{Im}(p)$ si et seulement si $p(x) = x$.

Q13. Définir la symétrie vectorielle par rapport à V parallèlement à W et montrer qu'elle est linéaire et que c'est une symétrie.

Q14. Si s est un symétrie vectorielle de E ($s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$), alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Q15. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ note $f^p = f \circ f \circ ... \circ f$, et $K_p = \ker(f^p)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $K_p \subset K_{p+1}$, et que si $K_p = K_{p+1}$, alors $K_{p+1} = K_{p+2}$.

Q16. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ note $f^p = f \circ f \circ ... \circ f$, et $I_p = \mathrm{Im}(f^p)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_{p+1} \subset I_p$, et que si $I_{p+1} = I_p$, alors $I_{p+1} = I_{p+2}$.

Q17. `[facultatif]` Donner un exemple d'application linéaire telle $K_2 = K_1$ et $I_2 \neq I_1$ (notations des questions précédentes).

Q18. `[facultatif]` Donner un exemple d'application linéaire telle $K_2 \neq K_1$ et $I_2 = I_1$ (notations des questions précédentes).

À venir : dérivabilité sur un intervalle, analyse asymptotique...