Continuité sur un intervalle

Dérivabilité sur un intervalle

Fonctions convexes

Définition, interprétation géométrique, inégalité de Jensen.
Caractérisation de la convexité à l'aide de la croissance des pentes.
Une fonction convexe est continue sur l'intérieur de I.
Caractérisation des fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables.
Position de la courbe représentative d'une fonction convexe et de ses tangentes.
Exemples d'inégalités de convexité.

Formules de Taylor

Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n en $a \in I$ pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Exemples avec les fonctions usuelles à différents ordres en $a = 0$.
Application : méthode de Newton d'approximation d'un zéro d'une fonction.
Majoration de l'erreur commise.

Questions de cours

Q.1 Énoncer et démontrer la formule de Jensen.

Q.2 Montrer que f est convexe sur I si et seulement si
$\forall (x,y,z) \in I^3,\ x < y < z \Rightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

Q.3 Déterminer les positions relatives de la courbe représentative d'une fonction convexe et de ses tangentes.

Q.4 Énoncer et démontrer l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques.

Q.5 A l'aide d'arguments de convexité, montrer que
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$ et que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) < x$.

Q.6 Énoncé et démonstration de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

Q.7 Démontrer que si $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$, la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral implique la formule de Taylor-Young en $a \in \mathring{I}$.

Q.8 Exposé de la méthode de Newton de calcul approché d'un zéro d'une fonction : calcul de la valeur approchée, interprétation qualitative de l'approximation.
Majoration de l'erreur commise, interprétation quantitative.

Q.9 Démontrer que pour tout réel x, $e^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right]$, avec $a_k = \cdots$.

Q.10 À l'aide d'une formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Q.11 À l'aide d'une formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Q.12 À l'aide d'une formule de Taylor-Young, déterminer le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de sin, cos, sh et ch en 0.

À venir : développements limités, puis espaces vectoriels de dimension finie.