Espaces vectoriels de dimension finie

I Revisions : espaces vectoriels

II Bases

Rappels sur les familles libres, liées, génératrices. Exemples dans $\mathbb{R}^n$ et dans les polynômes. Définition d'une base ; décomposition d'un vecteur dans une base. Une application linéaire est entièrement définie par son action sur une base de E ; construction d'applications linéaires à partir d'une base de E. Application : propriétés de f en fonction de celles de l'image d'une base de E.

III Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un e.v. de dimension finie ; existence de bases ; théorème de la base incomplète. Lien cardinal d'une famille de vecteurs / famille libre, liée, génératrice. Dimension d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. C.N.S pour qu'une famille libre (resp. génératrice) soit une base. Deux e.v. sur $\mathbb{K}$ de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension. Dimension d'un espace produit.
Exemples : suites linéaires récurrentes d'ordre 2, équations différentielles linéaires (à revoir).

IV Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Dimension d'un sous-espace, droites, hyperplans. Tout s.e.v. admet un supplémentaire. Dimension d'une somme directe. Formule de Grassmann : $\dim_{\mathbb{K}}(U+V) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap V)$. Caractérisation du supplémentaire par les dimensions.
Dimension d'une somme directe de plusieurs s.e.v. Concaténation de bases. C.N.S. sur les dimensions pour qu'une somme soit directe.
Rang d'une famille finie de vecteurs.

V Applications linéaires sur une espace vectoriel de dimension finie

Le cours n'a pas été fait, mais les étudiants connaissent déjà le théorème du rang, qui peut être utilisé dans des exercices.

Questions de cours

Par défaut, E et F sont des K-e.v. de dimension finie n et p, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Q1. Montrer que f est une surjection de E sur F si et seulement si $f(\mathcal{B})$ engendre F.

Q2. Montrer que f est une injection de E dans F si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.

Q3. `[facultative]` Existence de bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Q4. `[facultative]` Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$, toute famille de cardinal $> n$ est liée.

Q5. Démontrer que E et F sont isomorphes si et seulement si $n = p$.

Q6. Déterminer la dimension de $E \times F$.

Q7. `[facultative]` Déterminer la dimension de $\mathcal{L}\ (E, F)$.

Q8. Donner le schéma de la démonstration donnant l'ensemble des suites réelles ou complexes satisfaisant à une équation linéaire $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, $a \neq 0$.

Q9. Déterminer l'ensembles des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexes d'abord, puis réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.

Q10. Soit la suite de Fibonacci : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q11. Si U et V sont deux sous-espaces vectoriels de E, dimension de $U + V$.

À venir : applications linéaires en dimension finie, matrices représentatives.