Calcul matriciel

programme de la semaine 4

Matrices représentatives

1. Matrices représentatives

Matrice représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base.
Matrices représentatives d'une application linéaire dans deux bases, isomorphisme de K-e.v. induit entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(K)$.
Représentation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
Matrices représentatives d'un endomorphisme dans une base.
Matrices représentatives d'une composée d'applications linéaires ; lien avec le produit de matrices.
Matrices inversibles : lien avec les iso/automorphismes, calcul de l'inverse. (méthode : $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$).

2. Changement de base

Formule de changement de base pour les vecteurs, pour les applications linéaires, pour les endomorphismes. Définition de matrices équivalentes, semblables. Propriétés invariante par similitude : exemple de la trace.

3. Rang d'une matrice et matrices équivalentes

Définitions équivalentes du rang d'une matrice A : c'est celui de la famille des vecteurs colonnes de A, de celui de n'importe quelle famille de vecteurs représentés dans une certaine base par A, ou celui d'une application linéaire dont A est une matrice représentative.
Invariance du rang par multiplication à droite, à gauche, par une matrice inversible. Invariance du rang par transposition.
Une matrice est de rang r si et ssi elle est équivalente à $J_r^{n,p}$ (Preuve vectorielle).
Détermination algorithmique du rang à l'aide d'un pivot de Gauss (en admettant que les opérations élémentaires ne modifient pas le rang).
Invariance du rang par similitude, rang d'un projecteur.

Questions de cours

Q.1 Matrice représentatives et composition d'applications linéaires : résultats et démonstration.

Q.2 Définition d'une matrice de passage. Démontrer que la matrice de passage entre deux bases est inversible et donner une expression de l'inverse.

Q.3 Énoncer et démontrer la formule de changement de bases pour les vecteurs.

Q.4 Énoncer et démontrer la formule de changement de bases pour les applications linéaires.

Q.5 Donner (et les justifier) les traductions en termes de produit de matrices des opérations élémentaires.

Q.6 Expliquer et justifier l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer le rang et celui pour calculer l'inverse d'une matrice.

Q.7 Démontrer qu'une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r (preuve vectorielle).

Q.8 Matrice représentative dans une base adaptée d'un projecteur. En déduire que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

À venir : pivot de Gauss et rang de matrices, dénombrements et probabilités...