# Calcul matriciel

programme de la semaine 4

# Matrices représentatives

## 1. Matrices représentatives

## 2. Changement de base

## 3. Rang d'une matrice et matrices équivalentes

## 4. Pivot de Gauss

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes : Liste des 6 opérations élémentaires et leur traduction en termes de produit de matrices. Deux matrices déduites l'une de l'autre par un nombre fini de ces opérations ont même rang.

Toute matrice de rang $r$ est équivalente à $J_r$ (Preuve matricielle par pivot de Gauss). Rang d'une matrice triangulaire supérieure, d'une matrice triangulaire par blocs.
Application : méthode du pivot de Gauss ; utilisation pour le calcul du rang d'une matrice et, le cas échéant, le calcul de l'inverse (les seuls cas étudiés sont de petite dimension : 2,3 ou 4). Exemples.

# Ensembles finis - dénombrement

1. **Préliminaires :** relation d'équipotence, propriétés des applications sur les ensembles $[\![1,n]\!]$. Définition d'un ensemble fini.
2. **Cardinal d'un ensemble fini :** définition, premières propriétés. Résultats sur les parties de $\mathbb{N}$. Existence et unicité d'une bijection croissante entre une partie finie de $\mathbb{N}$ de cardinal $p$ et $[\![1,p]\!]$.
   Deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal. Equivalence injection/surjection dans le cas d'ensembles de départ et d'arrivée de même cardinal.
3. **Réunions et partitions** $E \cup F$ est fini, $\mathrm{Card}(E \cup F)$.
   Union disjointe et partitions. Premier lemme des bergers.
4. **Utilisation d'applications** Partitionnement via une fonction, deuxième lemme des bergers. Application au produit cartésien : $E \times F$ est fini et calcul de $\mathrm{Card}(E \times F)$. Application à $E^n$.
5. **Ensembles d'applications** Dénombrement des applications : $\mathcal{F}(E,F)$ est fini, $\mathrm{Card}\,(\mathcal{F}(E,F))$. Nombres de $p$-listes.
   Dénombrement des injections : défintion des arrangements ${A_n}^p$, interprétation en terme de nombres d'injections, de nombres de $p$-uplets. Expression factorielle. Nombre de permutations d'un ensemble fini. Interprétation en dénombrement.
6. **Ensemble de parties - combinaisons** révision : propriétés des coefficients binômiaux.
   Parties de $E$ : définition de $\mathcal{P}_p(E)$, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$, dénombrement.
   Interprétation ensembliste de la formule du triangle de Pascal, du binôme de Newton, calcul de $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

# Questions de cours

**Q1.** Démontrer qu'une matrice est de rang $r$ si et seulement si elle est équivalente à $J_r$ (preuve matricielle).

**Q2.** Démontrer que la matrice $A$ est inversible et déterminer son inverse pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

**Q3.** Matrice représentative dans une base adaptée d'un projecteur. En déduire que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

**Q4.** Si $E$ et $F$ sont des ensembles finis, alors $E \cup F$ est fini et calcul du cardinal. *(On justifiera le cas d'une union disjointe pour commencer.)*

**Q5.** Lemmes des Bergers : deux énoncés et justification.

**Q6.** Si $E$ et $F$ sont des ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et calcul du cardinal.

**Q7.** `[facultatif]` Si $E$ et $F$ sont des ensembles finis, alors $\mathrm{Card}\,(\mathcal{F}(E,F))$ est fini et calcul du cardinal.

**Q8.** Énoncer et démontrer la formule factorielle des arrangements : $A_n^p = ...$

**Q9.** Donner une justification ensembliste de la formule $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

**Q10.** Démonstration (ensembliste) de la formule du triangle de Pascal.

**Q11.** Donner une justification ensembliste de la formule du binôme de Newton.

**Q12.** Donner la formule de Vandermonde et en donner une justification ensembliste.

**Q13.** Si $E$ est un ensemble fini, démontrer que $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal. En déduire qu'il n'existe pas de surjection de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.

---

*À venir : probabilités sur un ensemble fini*