Ensembles finis - dénombrement

Probabilités

1. Espaces probabilisés finis

Expérience aléatoire, univers, événements (pour un univers Ω fini, on prendra toujours $\mathcal{P}(\Omega)$), vocabulaire : événements impossibles, incompatibles, globalement incompatibles.
Probabilité : définition et propriétés élémentaires (probabilités d'une réunion, d'un complémentaire, etc.). Formule classique des probabilités totales.
Images des événements élémentaires, définition de probabilités.

2. Variables aléatoires

Vocabulaire, définition, propriétés.
Loi d'une variable aléatoire. Egalité en loi. Lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale) à connaître.
Variable aléatoire image.

3. Évenements indépendants

Définition, exemples, indépendances des complémentaires. Famille d'événements 2 à 2 indépendants et (mutuellement) indépendants.
Indépendance et variables aléatoires, famille de variables aléatoires indépendantes, image et lemme des coalitions.

4. Probabilités conditionnelles

Définition, exemples. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, P_A définit une probabilité sur Ω, Formule des probabilités composées (ou en cascade), formules des probabilités totales, version conditionnelle.
Probabilité des causes, formule de Bayes, Formule de bayes générale.
Variables aléatoires : lois condiitionnelles.

5. Variables aléatoires couplées

Définition des lois conjointes et marginales d'un couple de variables aléatoires.
La connaissance de la loi conjointe donne celle des lois marginales. Exemples.

Questions de cours

Q.1 Définir ce qu'est un système complet d'événements. Formules (classique et conditionnelle) des probabilités totales.

Q.2 Formule des probabilités composées (ou en cascades).

Q.3 Définition de l'indépendance des événements. Si A et B sont indépendants, montrer que A et $\overline{B}$ le sont, ainsi que B et $\overline{A}$ et également $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Q.4 Lois usuelles : définir les loi uniforme, de Bernoulli et binomiale.
Donner des expériences conduisant à ces modèles.

Q.5 Déterminer la loi d'une somme $Z = X + Y$ de variables aléatoires X et Y indépendantes suivants des lois uniformes sur un même ensemble : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

Q.6 Démontrer l'identité de Vandermonde : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\forall i \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{i} \binom{m}{k}\binom{n}{i-k} = \binom{m+n}{i}$ avec $\binom{b}{a} = 0$ si $a > b$.

Q.7 Déterminer la loi d'une somme $Z = X + Y$ de variables aléatoires X et Y indépendantes suivants des lois binomiales $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$.

À venir : espérance et dispersion, matrices représentatives.