Ensembles finis - dénombrement

Probabilités

Position et dispersion d'une v.a. sur un univers fini

1. Espérance d'une variable aléatoire

Définition, formulation dans le cas d'un univers fini. Variable centrée
Linéarité, positivité, croissance de l'espérance. Transfert (espérance de $f(X)$). Espérance du produit dans le cas de variables indépendantes.
Espérance des lois usuelles.

2. Variance d'une variable aléatoire

Définition du moment d'ordre k de X. Variance. positivité de $V(X)$, écart-type. Formule de König-Huygens. Variance de $aX+b$.
Covariance : définition, expression, à l'aide de l'espérance, cas de variables indépendantes. Variance d'une somme.

3. Vers la loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov pour une v.a. positive. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Application aux intervalles de confiance.
Loi faible des grands nombres.

Calculs matriciels

Questions de cours

Les questions de cours 5 à 11 ont été déjà vues lors de l'étude des matrices

Q.1 Déterminer la loi d'une somme $Z = X + Y$ de variables aléatoires X et Y indépendantes suivants des lois binomiales $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Q.2 Espérance et variance des trois lois usuelles (au choix, avec preuve).

Q.3 Formule de Koenig-Huyghens.

Q.4 Inégalités de Markov et de Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Q.5 Démontrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Q.6 Rappeler la définition de la relation de similitude $\sim$ (« être semblable à ») et démontrer que c'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Q.7 Démontrer que pour toutes matrices A, B de $M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que la trace est un invariant de similitude. Application : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Q.8 Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha \cdot I_n$.

Q.9 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Q.10 Calcul de A^n pour $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Q.11 Démontrer qu'une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r *(démonstration matricielle ou vectorielle au choix)*.

À venir : groupe symétrique, déterminants.