Groupe symétrique

Définition du groupe symétrique, écriture des permutations.
Transposition et cycles. Notation.
Support et commutativité de permutations.
Orbites et décomposition en produit de cycles.
Définition de la signature. C'est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$.

Déterminants $n \times n$

Formes multilinéaires alternées. Définition, propriétés, expression dans une base. Dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n.
Déterminant d'une famille de vecteurs. Caractérisation des bases, changement de bases.
Orientation de l'espace.
Déterminant d'un endomorphisme. Expression dans une base.
Déterminant d'une matrice carrée. Expression polynomiale en les coefficients, tranposition. Lien avec les endomorphimes et les famille de vecteurs.
Développement suivant une ligne ou une colonne. Expression récursive du déterminant.
Exemples de calculs.
Déterminants opérations élémentaires, déterminant de matrice triangulaire, triangulaire par blocs. Déterminant d'un produit, d'une transposée.
Mineurs, cofacteurs et développements suivant une ligne ou une colonne. Formule $Com(A)^T \times A = \det(A).I_n$.
Systèmes et formules de Cramer.
Exemples guidés de diagonalisation.

Questions de cours

Q.1 Démontrer que la définition du déterminant d'un endomorphisme :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

est bien indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie.
En déduire que le déterminant matriciel est un invariant de similitude.

Q.2 En détaillant les multiplications de matrices, retrouver les modifications l'effet des opérations élémentaires sur le déterminant (on se limitera aux cas 3×3). (L'interrogateur en demandera 2 ou 3 parmi les 6)

Q.3 Pour $n \geqslant 2$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Q.4 Si $a \neq b$, on définit $M = \begin{pmatrix} 1 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide de $f(x) = \det(M + xU)$, calculer $\det(M)$.

Q.5 Étude du cas $a = b$ dans la question précédente.

Q.6 Calculer le déterminant de Vandermonde $n \times n$.

Q.7 Donner et démontrer les formules de Cramer.

Q.8 `[facultative]` Démontrer la formule $Com(A)^T \times A = \det(A).I_n$

Q.9 `[facultative]` Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

À venir : séries.