Espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire

Définition d'un produit scalaire sur E. Exemples de produits scalaires : canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}[X]$, sur $M_N(\mathbb{R})$.

2 Propriétés des espaces préhilbertiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz ; cas d'égalité.
Norme sur E, norme euclidienne (associée à un produit scalaire). Liens entre norme et produit scalaire : identités de polarisation, du parallèlogramme.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore, famille orthogonale et orthonormale. Propriétés, décomposition d'un vecteur. Orthogonal d'une partie, cas d'un sous-espace vectoriel.

3 Propriétés d'un espace euclidiens

Espace euclidiens, bases orthonormales, calculs dans ces bases et expression matricielle du produit scalaire dans une base orthonormale.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : exemples, description algorithmique, théorème.

Conséquence : existence de bases orthonormales et théorème de la base orthonormale incomplète.

4 Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension fini

Existence, unicité : théorème du supplémentaire orthogonal.

Conséquences dans le cas d'un espace euclidien, expression des formes linéaires, équations des hyperplans.

5 Projections orthogonales et distance à un sev de dimension finie

Définition, propriétés d'un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expressions dans une b.o.n. Exemples.

Symétrie orthogonales : Définition, propriétés d'une symétrie orthogonale. Propriétés des hyperplans, réflexion.

Applications au calcul de la distance d'un vecteur à un s.e.v. de dimension finie.

Questions de cours

Q.1 Définir (et le démontrer) un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Justifier que c'est encore un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q.2 Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.

Q.3 Montrer que toute famille orthonormée de cardinal égal à la dimension de E est une base de E et donner l'expression d'un vecteur dans cette base.

Q.4 Soient F et G deux s.e.v. d'un espace euclidien E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Q.5 Montrer (rapidement) que $(f|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$. Montrer que la famille constituée des $x \mapsto \cos(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et des $x \mapsto \sin(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est orthonormée.

Q.6 Énoncé et démonstration du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Q.7 Déterminer l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

Q.8 A l'aide de l'interpolation de Lagrange, donner (et le démontrer) une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

Q.9 Déterminer la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z=0$.
`[facultatif ]` Proposer deux méthodes différentes.

Q.10 Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left(\int_0^1 \left(t^2+at+b\right)^2 \mathrm{d}t\right)$. *(à l'aide d'un produit scalaire !)*

Q.11 **`[facultatif]`** Soit p un projecteur vectoriel de E. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :

(i) p est un projecteur orthogonal ;

(ii) $\forall (x,y)\in E^2$, $(p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$;

(iii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

À venir : intégration, fonctions de deux variables.