Intégration sur un segment

1. Intégrale d'une fonction de $\mathcal{C}_{MOR}([a,b],\mathbb{R})$

1. Intégration des fonctions en escalier sur $[a,b]$: définition des fonctions en escaliers, subdivision adaptée, structure de l'ensemble des fonctions en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier, définition et propriétés.
2. Approximation des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier : si f est continue sur $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.
   Intégrale des fonctions continues, interprétations en termes d'aires. Propriétés élémentaires : linéarité, relation de Chasles, invariance par translation, majoration, minoration élémentaires, valeur moyenne d'une fonction. Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Définition, structure de l'ensemble des fonctions continues par morceaux. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. Approximation uniforme (encadrement) d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Intégrale d'une fonction continue par morceaux. , interprétations en termes d'aires. Propriétés élémentaires : linéarité, relation de Chasles, invariance par translation, majoration, minoration élémentaires, valeur moyenne d'une fonction. Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Approximations d'une intégrale sur un segment

1. Sommes de Riemann (de pas constant uniquement) : convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de $f \in \mathcal{C}_{MOR}([a,b],\mathbb{R})$. Preuve dans le cas où f est continue.
2. Méthode des rectangles à gauche : reprise des sommes de Riemann, convergence et majoration de l'erreur dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples et calculs.
3. Méthode des trapèzes. Approximation, majoration de l'erreur dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$.

3. Lien intégration/dérivation

1. Primitives d'une fonction continue, théorème fondamental, applications
2. Théorème d'intégration par parties (de classe $\mathcal{C}^1$) et de changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$) pour les fonctions continue. Exemples.
3. Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

4. Calculs de primitives

Reprendre ce qui a été vu précédemment : polynôme-exponentielle (primitive de $t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$) ; fractions rationnelles (D.E.S), fractions rationnelles en cos et sin (CV $t = \tan(x/2)$) ; fonctions usuelles .

Questions de cours

Q.1 `[facultative]`Énoncé et démonstration du théorème de Heine.

Q.2 Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier : énoncé et démonstration.

Q.3 Énoncé et démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Q.4 Démontrer que si f est continue par morceaux sur l'intervalle I, alors $\forall a \in I,\ F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur I.

Q.5 Démontrer que si f est continue sur l'intervalle I, alors $\forall a \in I,\ F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur I et ${F_a}' = f$.

Q.6 Démontrer que si f est continue, positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

Q.7 Énoncé et démonstration des théorèmes d'intégration par parties et de changement de variables pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Q.8 Démonstration de la formule des sommes de Riemann (pas constant) pour une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Majoration de l'erreur.

Q.9 Calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)$.

Q.10 Exposé de la méthode d'intégration numérique des trapèzes ainsi que majoration de l'erreur commise.
(on admettra que pour tout $a < b$, si $\left|f''(t)\right| \leqslant M$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$.)

Q.11 Énoncé et démonstration de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

À venir : fonctions de deux variables.