Sommes et produits

Retour sur les manipulations de calcul algébrique.

1. Notations et définitions. Changement d'indice, sommes télescopiques, regroupement de termes, exemples.
2. Formule de Bernoulli ($a^n - b^n = ...$), sommes des termes d'une suite géométrique.
3. Sommes doubles : manipulation de sommation sur un rectangle $[\![0,n]\!] \times [\![0,n]\!]$, exemples de sommation sur des triangles.
4. Formule du binôme de Newton :
   factorielles, coefficients binomiaux, triangle de Pascal, formule du binôme.

Vocabulaire ensembliste

Eléments de logique.
Ensembles : appartenance, inclusion, ensemble des parties.
Opération sur $\mathcal{P}(E)$: égalité, réunion, intersection, complémentaire.
Couples et ensemble produit.
Relations binaires, relations d'ordre.
Exemples de démonstrations : égalité d'ensembles, équivalences, etc...
Vocabulaire des lois de composition : définition, associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.

Questions de cours

Q1. Énoncer et démontrer la formule de Bernoulli.

Q2. Calcul direct de $\sum_{k=0}^{n} k$ à l'aide de $(k+1)^2 - k^2 = ...$ et d'une somme télescopique.

Q3. Énoncé et démonstration de la formule du triangle de Pascal.

Q4. `[facultative]` Donner une implémentation python d'une fonction calculant les factorielles.

Q5. Énoncé et démonstration du binôme de Newton.

Q6. Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

Q7. `[facultative]` Calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$ à l'aide d'une somme télescopique.

Q8. Soit A, B, C des ensembles. Démontrer que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Q9. Démontrer que si E, F, G, H sont des ensembles,
$(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

Q10. Démontrer que si E, F, G, H sont des ensembles,
$(E \times F) \cup (G \times H) \subset (E \cup G) \times (F \cup H)$.
Donner un contre-exemple montrant que l'inclusion réciproque est fausse.

Q11. Démontrer que la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
Justifier que l'ordre ainsi défini est partiel.

Q12. Soit γ une loi de composition interne sur E.
Définir ce qu'est un élément neutre et en prouver l'unicité.
Définir l'inversibilité d'un $x \in E$, son inverse et prouver l'unicité de ce dernier.
Si x et y sont inversibles, prouver que $x\gamma y$ l'est aussi et donner son inverse.

À venir : fonctions numériques : calcul différentiel, calculs matriciels et systèmes linéaires.