Techniques fondamentales d'analyse : calcul différentiel

Ensemble de définition, représentations graphiques. Parité, imparité, périodicité.

Continuité, théorèmes de continuité sur un intervalle. Dichotomie.

Nombre dérivé, fonction dérivée. Équation de la tangente en un point.

Dérivées d'ordre supérieur, ensembles $D^n(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{C}^\infty$ $(I,\mathbb{R})$.

Dérivation et opérations (somme, produit, inverse et composée).

Définition d'une bijection, condition suffisante de bijectivité (continue et strictement monotone).
Application réciproque, dérivation de l'application réciproque, applications aux fonction $x \mapsto x^2$ sur $]0,+\infty[$, exp et ln.

Dérivation et variations (caractérisations des fonctions monotones sur un intervalles, cas d'une monotonie stricte).

Établir un tableau des variations, puis principe de tracé d'une représentation graphique. Positions relatives d'une courbe et de sa tangente.

Fonctions convexes : définition, caractérisations à l'aide des dérivées, propriétés des tangentes.

Rappel du théorème fondamental de l'analyse.

Calcul Matriciel *(cours seul, les exercices porteront sur l'analyse)*

Définition d'une matrice, notation $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, égalité de deux matrices.
Définition des lois $+$, $\cdot$ (loi externe), propriétés classiques.
Matrices élémentaire $E_{k,l}$, notations à l'aide de symboles de Kronecker :

$$E_{k,l} = (\delta_{ik}\delta_{jl}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Transposition, linéarité de la transposée.
Matrices carrées : notation $M_n(\mathbb{K})$, matrice diagonale, triangulaire (supérieure/inférieure), matrice symétrique, antisymétrique. Trace.
Matrice colonne, matrice ligne.

Questions de cours

Les étudiants doivent savoir justifier les propriétés d'une fonction composée (domaine de définition, de dérivabilité, calcul de la dérivée, etc...) et utiliser celles-ci pour obtenir des représentations graphiques ou des inégalités.

Q1. Condition suffisante de bijectivité (à l'aide des variations et de la continuité). Application : supposant connue la dérivabilité de ces fonctions, montrer que ln, exp et $x \mapsto x^2$ sont des bijections sur des intervalles que l'on précisera.

Q2. Énoncer le théorème de dérivation de l'application réciproque. Application : prouver la dérivabilité de exp, définie comme fonction réciproque de ln et en supposant connues les propriétés de ln.

Q3. Énoncer le théorème de dérivation de l'application réciproque. Application : prouver la dérivabilité de ln, définie comme fonction réciproque de exp et en supposant connues les propriétés de exp.

Q4. Énoncer le théorème de dérivation de l'application réciproque. Application : prouver la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$, définie comme fonction réciproque de $f : x \mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$, et en supposant connues les propriétés de f.

Q5. Justifier la dérivabilité et déterminer la dérivée n^{e} de $f : x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$.

Q6. Justifier la dérivabilité et déterminer la dérivée n^{e} de $g : x \mapsto x^2 e^{\alpha x}$.

Q7. Démontrer l'associativité du produit matriciel.

Q8. Démontrer la distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition matricielle.

Q9. Eńoncer et démontrer la formule de Bernoulli dans $M_n(\mathbb{K})$.

Q10. Eńoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $M_n(\mathbb{K})$.

À venir : calculs matriciels, systèmes linéaires.