Calcul Matriciel

Définition d'une matrice, notation $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, égalité de deux matrices.
Définition des lois $+$, $\cdot$ (loi externe), propriétés classiques.
Matrices élémentaire $E_{k,l}$, notations à l'aide de symboles de Kronecker :

$$E_{k,l} = (\delta_{ik}\delta_{jl}) \in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Transposition, linéarité de la transposée.
Matrices carrées : notation $M_n(\mathbb{K})$, matrice diagonale, triangulaire (supérieure/inférieure), matrice symétrique, antisymétrique. Trace.
Matrice colonne, matrice ligne.
Produit de matrices, propriétés usuelles, relations avec les lois $+$ et $\cdot$. Cas de la non commutativité, existence de diviseurs de zéros, conséquence sur les équations matricielles $A \times B = A \times C$.
Matrices inversibles : définition, unicité de l'inverse. Cas particulier des matrices ($A \times B = I_n \Leftrightarrow B \times A = I_n$). Méthode de calcul pratique par résolution de système, exemples.
Inverse d'un produit, transposée d'un produit, trace d'un produit.
Matrices semblables : définition de la relation d'équivalence « être semblable à » .
Deux matrices semblables ont même trace.
Déterminants dans $M_2(\mathbb{K})$ et inversibilité.

Systèmes linéaires : méthode du pivot de Gauss

Définition, écriture matricielle : $(S) AX = B$.
Système homogène (S_0) associé à un système (S). Structure de sous-espace vectoriel de l'ensemble des solutions de (S_0).
Ensemble des solutions du système complet (S).
Opérations élémentaires sur les lignes. Une telle opération ne modifie pas les solution du système (admis).
Description pratique de la méthode du pivot de Gauss. Exemples.

Questions de cours

Q1. Démontrer *(au choix de l'interrogateur)* l'associativité du produit matriciel et sa distributivité par rapport à l'addition matricielle.

Q2. Eńoncer et démontrer *(au choix de l'interrogateur)* la formule de Bernoulli ou du binôme de Newton dans $M_n(\mathbb{K})$.

Q3. Démontrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.
Montrer que si les matrices A et B inversibles (i.e. $\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$),
alors AB est aussi inversible et déterminer $(AB)^{-1}$.

Q4. Démontrer que la relation $\sim$ (« être semblable à ») est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Q5. Démontrer que pour toutes matrices A, B de $M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que la trace est un invariant de similitude.
Application : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Q6. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Q7. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q8. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente $(\exists p \in \mathbb{N}^*, A^p = 0_n)$,
alors $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Q9. Définir le déterminant d'une matrice de $M_2(\mathbb{K})$ et démontrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. En déduire que si A est inversible, alors $\det(A) \neq 0$, et que det est un invariant de similitude.

Q10. Condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible et expression de l'inverse le cas échéant *(On pourra admettre le résultat de la question précédente).*

Q11. Démontrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Q12. Expression de l'ensemble des solutions d'un système linéaire en fonction de celui du système homogène associé.

À venir : nombres complexes.