Matrices et systèmes linéaires

Le corps des nombres complexes

I. Le corps $\mathbb{C}$

1. **Définition et construction** idée de la construction de $\mathbb{C}$, structure de corps contenant $\mathbb{R}$. Notation, parties réelles, imaginaires, conjuguées. Propriétés.
2. **Module d'un nombre complexe :** définition et propriétés ; inégalités triangulaires.
3. **Groupe multiplicatif des complexes de modules 1.**
4. **Interprétation géométrique des nombres complexes :** affixe d'un point du plan, d'un vecteur, image d'un complexe. Distance sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}^2$, disque ouvert/fermé, partie bornée de $\mathbb{C}$.
5. **Formules sommatoires :** binôme de Newton, formule de Bernoulli (somme des termes d'une suite géométrique).

II. Forme trigonométrique d'un complexe non nul

1. **Définition :** $e^{i\theta}$; formules d'Euler. L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathcal{U},\times)$. Forme trigonométrique d'un complexe non nul, argument, argument principal. Calcul des formules trigonométriques classiques. Exemples : recherche du module et de l'argument de $e^{ia} \pm e^{ib}$, application à la transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$.
2. **Applications à la trigonométrie :** formules de de Moivre, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, linéarisation de $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$, expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

III. Exponentielle complexe

Définition, propriétés fonctionnelles, solutions complexes de $e^z = a$.

Questions de cours

Q1. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha \cdot I_n$.

Q2. Soit $D = Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ une matrice diagonale telle que $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ commute avec D, alors A est diagonale.

Q3. Inégalités triangulaires pour les nombres complexes. Enoncés et démonstrations.

Q4. Première inégalité triangulaire : énoncé et démonstration du cas d'égalité.

Q5. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Q6. Enoncé et démonstration de la formule de Bernoulli dans $\mathbb{C}$. Applications à la somme des termes d'une suite géométrique.

Q7. Enoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Q8. Rechercher le module et un argument de $e^{i\theta} + 1$ et de $e^{i\theta} - 1$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Q9. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Q10. Linéariser $\sin^5(\theta)$.

Q11. Exprimer $\sin(6\theta)$ comme le produit de $\cos(\theta)$ d'une part et d'un polynôme en $\sin(\theta)$ d'autre part.

À venir : vacances d'automne d'abord, puis nombres complexes encore : racines d'équations, applications géométriques et premières décompositions en éléments simples puis les applications.