Je souhaite à tous, étudiant·e·s comme interrogateur·trice·s, de bonnes vacances d'automne.

Le corps des nombres complexes

4. Équations et racines dans $\mathbb{C}$

Racines carrées d'un nombre complexe, méthodes de recherche des racines carrées.
Equation du second degré à coefficients complexes. Relations coefficients/racines pour un polynôme de degré 2.
Racines n^{es} de l'unité : définition, structure de groupe de l'ensemble $\mathcal{U}_n$, expression explicite des racines n^{es} de l'unité, somme des racines.
Application à la résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^n = a$.

5. Applications géométriques et transformations du plan

Interprétations complexes des normes et angles de vecteurs, de la distance, de l'alignement, de l'orthogonalité.
Expression complexe d'une translation, d'une rotation, d'une homothétie, d'une similitude directe. Exemples de recherches de centre et de rapport d'une similitude directe, de l'expression complexe d'une similitude donnée.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ (partie 1)

Les seuls cas étudiés dans cette section sont les fractions $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$, avec les conditions :

$$\begin{cases} \bullet (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2 ; \\ \bullet \deg P < \deg Q ; \\ \bullet Q = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n) \\ \quad \text{avec } i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j ; \\ \bullet \forall i \in [\![1,n]\!], P(a_i) \neq 0. \end{cases}$$

(Les racines de Q sont toutes *simples*. On dit que ce sont des *pôles simples* de F).

Dans ce cas, la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - a_i}.$$

Formules de calcul des coefficients : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \dfrac{P(a_i)}{Q_{a_i}(a_i)} = \dfrac{P(a_i)}{Q'(a_i)}$

Exemples de calcul.

Illustration sur des exemples du regroupement des termes complexes conjugués dans le cas où $F \in \mathbb{R}(X)$, décomposition sur $\mathbb{R}$.

Questions de cours

Q1. Déterminer de deux manières les racines carrées de $1+i$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$.

Q2. Racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes : algorithme et preuve.

Q3. Déterminer *(en utilisant l'algorithme précédent)* les solutions de $z^2 + z + 1 - i = 0$

Q4. Démontrer que $\mathcal{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Q5. Donner une expression paramétrée par $k \in [\![0, n-1]\!]$ de $\mathcal{U}_n$. En déduire que la somme des racines n^{e} de l'unité est nulle.

Q6. Définir le complexe j et en démontrer les principales propriétés (formes algébriques et trigonométriques, $j^3 = ..$, conjugué, inverse, $1 + j + j^2 = ...$).

Q7. Déterminer l'unique similitude directe s qui envoie 1 sur 3 et i sur 1. Donner les éléments caractéristiques (centre, rapport et mesure d'angle) de s.

Q8. On s'intéresse aux points A et B du plan d'affixes $a = re^{i\theta}$ et $b = re^{-i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le triangle OAB soit équilatéral puis rectangle en O (origine du plan).

Q9. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) la fraction rationnelle :
$F(X) = \dfrac{1}{X^3 - 1}$. Donner sa décomposition sur $\mathbb{R}$.

Q10. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) la fraction rationnelle :
$F(X) = \dfrac{X+1}{X^3 - 2X^2 + 2X}$. Donner sa décomposition sur $\mathbb{R}$.

À venir : applications, puis les fonctions usuelles.