Applications

Rappels

définitions, notations et fonctions indicatrices.

I Injections

Définition, exemples, composition et injectivité.

II Surjections

Définition, exemples, composition et surjectivité.

III Bijections

Définition, exemples, composition et bijectivité.
Existence de la fonction réciproque f^{-1} ; caractérisation des bijections par l'existence de g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Définition d'ensembles équipotents, l'équipotence est une relation d'équivalence.

IV Images directes et images réciproques d'une application

Définitions, notations : $f\langle A\rangle$ et $f(A)$ pour l'image directe, $f^{-1}\langle M\rangle$ et $f^{-1}(M)$ pour l'image réciproque.
Images directe et réciproques de la composée de deux applications.
Cas particuliers des fonctions numériques.
Relations entre images directes/réciproques et union/intersection d'ensembles.

V Restrictions et prolongements

Définitions.

Révisions : techniques fondamentales d'analyse (1)

Reprendre le programme de la semaine 3.

Questions de cours

Q1. Démontrer par une étude algébrique que l'application $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Q2. Démontrer par l'étude de fonction numérique que l'application $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Q3. Démontrer que la composée de deux surjections est une surjection.

Q4. Montrer que si $g \circ f \in SURJ(E,G)$, alors $g \in SURJ(E,F)$.
Donner un exemple montrant que f peut ne pas être une surjection.

Q5. Montrer que si $g \circ f \in INJ(E,G)$, alors $f \in INJ(E,F)$.
Donner un exemple montrant que g peut ne pas être une injection.

Q6. Démontrer que la composée de deux injections est une injection.

Q7. f est une bijection de E sur F
si, et seulement si, il existe g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Q8. Montrer que si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et si $A, B \subset E$, alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Q9. Montrer que si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et si $A, B \subset E$, alors $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Discussion de l'inclusion réciproque.

Q10. Montrer que si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $M, N \subset F$, alors $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

Q11. Montrer que si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $M, N \subset F$, alors $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

Q12. Si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A, B, E \neq \emptyset$, on définit l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

Démontrer que si $E = A \sqcup B$, alors f est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, d'application réciproque $f^{-1}(X,Y) = X \cup Y$.

Q13. `[facultatif]` Avec les notations de la question 12, démontrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(i) f est une injection de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$;
(ii) $A \cup B = E$.

Q14. `[facultatif]` Avec les notations de la question 12, démontrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
(i) f est une surjection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$;
(ii) $A \cap B = \emptyset$.

À venir : fonctions usuelles, techniques fondamentales de l'analyse (2 : intégration).