

Révisions : techniques fondamentales d'analyse (1)

Reprendre le programme de la semaine 3.

Fonctions usuelles

I. Fonctions logarithme/exponentielle/puissances Définition de \ln , propriété fonctionnelle, dérivabilité, croissances comparées.

Définition de \exp comme réciproque de la fonction \ln , propriétés.

Fonctions puissances : définition, propriétés.

II. Fonctions circulaires réciproques

Définition, domaine, dérivée et graphe de \arcsin , \arccos et \arctan .

Applications au calcul intégral et à la détermination de l'argument d'un nombre complexe.

III. Fonctions hyperboliques

Définition, domaine, dérivée et graphe de sh , ch et th .

Relation de trigonométrie hyperbolique : $\operatorname{ch}^2 = 1 + \operatorname{sh}^2$.

IV. Fonctions à valeurs complexes

fonctions de la variable réelle à valeur complexes (définition, dérivabilité, calcul de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes : dériver une fonction à valeurs dans \mathbb{C} revient à dériver ses parties réelles et imaginaires).

Dérivée de $t \mapsto e^{g(t)}$ si $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$; cas particulier de $t \mapsto e^{at}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Dérivée de $t \mapsto \frac{1}{t-a}$ lorsque $a \in \mathbb{C}$.

Questions de cours

- Q1.** En définissant $\ln : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$, démontrer la relation fonctionnelle du logarithme à l'aide d'une étude de la fonction $f : x \mapsto \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$.
- Q2.** En définissant $\ln : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$, démontrer la relation fonctionnelle du logarithme à l'aide de changements de variables.
- Q3.** Démontrer de deux manières différentes que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Q4.** Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)}{x} = 0$.
- Q5.** Admettant Q.4, déterminer, pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$.
- Q6.** Définir la fonction \arcsin et déterminer sa dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. Tracer sa courbe représentative.
- Q7.** Définir la fonction \arccos et déterminer sa dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. Tracer sa courbe représentative.
- Q8.** Définir la fonction \arctan et déterminer sa dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. Tracer sa courbe représentative.
- Q9.** Définir la fonction ch et déterminer sa dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. Tracer sa courbe représentative.
- Q10.** Définir la fonction sh et déterminer sa dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. Tracer sa courbe représentative.
- Q11.** Définir la fonction th et déterminer sa dérivabilité ainsi que l'expression de sa dérivée. Tracer sa courbe représentative.
- Q12.** Si $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$, démontrer que $f : t \mapsto e^{g(t)}$ est dérivable sur l'intervalle réel I et déterminer sa dérivée.
- Q13.** Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

À venir : techniques d'intégration, équations différentielles.