

Techniques fondamentales en analyse (2) : intégration

1. Théorème fondamental de l'analyse (sans démonstration pour le moment).

Notation MPSIA : $x \mapsto \int_*^x f(t) dt$ désigne une primitive de f (sur un intervalle que l'on précise et sur lequel f est continue).

2. Intégration par parties : cas des fonctions \mathcal{C}^1 .

3. Changement de variables : cas d'un changement de variables de classe \mathcal{C}^1 .

4. Primitives usuelles on connaît les primitives

- de polynômes, de polynôme-exponentielle ($x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$, à valeurs complexes);
- de \ln , de \sin , de sh , de \cos , etc.;
- de $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ pour $a \in \mathbb{R}$;
- de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$ pour $a \in \mathbb{C}$;
- de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$...

5. Intégration des fonctions à valeurs complexes. Théorème fondamental dans \mathbb{C} , calcul à l'aide de primitives.

Cas particulier : primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

6. Intégration des fractions rationnelles seules les fractions de degré < 0 et n'ayant que des pôles simples ont été vues jusque là .

Cas particulier : primitive de $x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}$ avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$.

Questions de cours

- Q1.** Énoncé et démonstration du théorème d'intégration par parties \mathcal{C}^1 .
- Q2.** Énoncé et démonstration du théorème de changement de variables \mathcal{C}^1 .
- Q3.** Déterminer une primitive de \ln , de \arctan .
- Q4.** Calculer $\int_0^1 t^3 e^{(1+i)t} dt$.
- Q5.** Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(t)} dt$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$.
- Q6.** Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.
- Q7.** Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.
- Q8.** Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{x-2+3i} dx$.
- Q9.** Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx$.
- Q10.** Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$.
- Q11.** Calcul de $\int_0^1 \frac{1}{t^3+1} dt$.
- Q12.** Calcul de $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-x+1} dx$.

À venir : équations différentielles linéaires, puis arithmétique.