

Équations différentielles linéaires

1 Généralités

Définitions et terminologie (vues pour des équations d'ordre 1 et 2 uniquement) : équations différentielles, équations différentielles linéaires, équations homogènes. Problème de Cauchy (problème aux conditions initiales).

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définitions et terminologie. On s'intéresse et se ramène à l'équation normalisée :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x),$$

où a et b sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Structure de l'espace des solutions :

1) $\mathcal{S}_0$ est un sous-e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$; 2) si $f_p \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0$.

Résolution de l'équation homogène associée.

Résolution de l'équation générale : solution « particulière », principe de superposition, méthode de variation de la constante.

Problème de Cauchy : existence et unicité de la solution à condition initiale donnée.

Exemple d'équation où a n'est pas continue : normalisation, intervalles de résolution, (questions de recollement : évoquées et peu abordées jusque là).

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On s'intéresse aux équations $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ où a, b, c sont des constantes, réelles ou complexes, $a \neq 0$ et d une application continue de I dans $\mathbb{K}$.

Structure de l'espace des solutions :

1) $\mathcal{S}_0$ est un sous-e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$; 2) si $f_p \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0$.

Résolution de l'équation homogène, dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Résolution de l'équation avec second membre : forme des solutions, principe de superposition, cas particulier d'un second membre de la forme $d : x \mapsto e^{\alpha x} P(x)$ où P est un polynôme à coefficients réels ou complexes.

Dans le cas réel, cas particulier d'un second membre de la forme $d : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $d : x \mapsto \sin(\omega x)$

Problème de Cauchy : existence et unicité de la solution à condition initiale donnée.

Questions de cours

- Q1.** Soit (E) $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène associée est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{K})$. (Les étudiants ne savent pas pour le moment ce qu'est un espace vectoriel. Il ne connaissent que la définition d'un s.e.v. de ...)
- Q2.** Démontrer que pour l'équation de (E) précédente, si $f_p \in \mathcal{S}$ (ensemble des solutions de (E)), alors $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0$.
- Q3.** Soit (E) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ($a \neq 0$). Démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène associée est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I, \mathbb{K})$. (Les étudiants ne savent pas pour le moment ce qu'est un espace vectoriel. Il ne connaissent que la définition d'un s.e.v. de ...)
- Q4.** Démontrer que pour l'équation de (E) précédente, si $f_p \in \mathcal{S}$ (ensemble des solutions de (E)), alors $\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0$.
- Q5.** Soit (E_0) $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Déterminer (et le démontrer !) l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$.
- Q6.** Soit (E) $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose connu le résultat de la question Q5. Déterminer (et le démontrer !) l'expression intégrale des solutions $\mathcal{S}$.
- Q7.** Soit (E_0) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ tels que $b^2 - 4ac \neq 0$. Déterminer (et le démontrer !) l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$.
- Q8.** Soit (E_0) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ tels que $b^2 - 4ac = 0$. Déterminer (et le démontrer !) l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$.
- Q9.** Soit (E_0) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tels que $b^2 - 4ac < 0$. Déterminer (et le démontrer !) l'ensemble des solutions à valeurs réelles $\mathcal{S}_0$. (On supposera connu le résultat de la question Q7).
- Q10.** Soit (E) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{\lambda x}$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer, suivant les valeurs de λ une solution « particulière » de (E) .
- Q11.** Soit (E) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \cos(\omega x)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Déterminer, suivant les valeurs de ω une solution « particulière » de (E) .

À venir : arithmétique.