ATTENTION : pas de khôlles cette semaine ! Ce qui ne veut pas dire que le programme ne doit pas être travaillé...

Structure de groupe

Définition d'un groupe, notations additives et multiplicatives, calculs.
Sous-groupes, morphismes de groupes, noyau et image.
Exemples.
Le groupe symétrique n'a pas encore été traité encore (même si l'on sait que $(S([\![1,n]\!]),\circ)$ est un groupe). Nous y reviendrons plus tard.

Révisions : calcul matriciel (vu en semaine 3)

Structure d'Anneau

I. Définitions et structure d'anneau

Anneau, anneau commutatif, éléments inversibles (notation $\mathcal{U}(A)$ et non A^*). Exemples : anneaux de nombres, matrices, applications de I dans $\mathbb{R}$.

Calculs dans un anneau

Règles de calcul dans un anneau. Notations $\sum$ et $\prod$. Distributivité généralisée. Formules de Bernoulli ($x^n - y^n = ...$), du binôme de Newton .

Propriétés particulières

Diviseurs de zéros, définition d'un anneau intègre. Eléments nilpotents.

Éléments inversibles

II. Sous-anneaux. Exemples de $\mathbb{Z}[i]$ et de $M_2(\mathbb{Z})$

III. Notions de Corps

IV. Exemples de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (HP mpsi)

Questions de cours

Q1. Démontrer que si $p \in \mathbb{P}$, alors pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$.
En déduire $(a+b)^p$ $[p]$.

Q2. Enoncé et démonstration du petit théorème de Fermat.

Q3. `[facultatif]` Théorème des restes chinois.

Q4. Si E est un ensemble et $S(E)$ l'ensemble des permutations de E, montrer que $(S(E),\circ)$ est un groupe.

Q5. Soit f un morphisme de groupes de (G,γ) dans (H,δ).
Démontrer si V est un sous-groupe de (G,γ) alors $f(V)$ est un sous-groupe de (H,δ). Application à l'image d'un morphisme de groupes.

Q6. Soit f un morphisme de groupes de (G,γ) dans (H,δ).
Démontrer si W est un sous-groupe de (H,δ) alors $f^{-1}(W)$ est un sous-groupe de (G,γ). Application au noyau d'un morphisme de groupes.

Q7. Donner et démontrer une condition nécessaire sur $\ker(f)$ pour qu'un morphisme de groupes soit une injection.

Q8. Formule de Bernoulli ($x^n - y^n = ...$) dans un anneau, énoncé et démonstration.

Q9. Formule du binôme de Newton dans un anneau , énoncé et démonstration.

Q10. Démontrer que $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau et déterminer $\mathcal{U}$ $(\mathbb{Z}[i])$.

Q11. Démontrer que $M \in M_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Q12. `[facultatif]` Démontrer que $M \in M_2(\mathbb{Z})$ est inversible dans $M_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \{1,-1\}$.

Q13. Démontrer que si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Q14. `[facultatif]` Démontrer que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.

Q15. `[facultatif]` Démontrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si $p \in \mathbb{P}$.

À venir : nombres réels et suites numériques.