Je souhaite à tous, élèves et interrogateurs, de bonnes vacances bien méritées, des fêtes joyeuses ainsi que la meilleure année 2025 possible !

Le corps des nombres réels

I Corps des rationnels

Esquisse de la construction de $\mathbb{Q}$, mise en évidence de nombres non rationnels.

Exemples de résultats non vérifiés sur $\mathbb{Q}$: valeurs intermédiaires, suites adjacentes, « propriété de la borne supérieure » .

II Le corps des réels, propriété de la borne supérieure

La construction et les propriétés élémentaires de $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ sont admises. **Borne supérieure, borne inférieure** : définition, unicité, utilisation pratique. Propriété d'existence sur $\mathbb{R}$. Caractérisation « en ε » des bornes supérieures/inférieures d'une partie de $\mathbb{R}$.

III Valeur absolue (revoir le cours de début d'année)

IV La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition ; intervalles de $\mathbb{R}$. Définition d'un ensemble convexe. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

V Approximation des nombres réels, densité des rationnels

Caractère archimédien de $\mathbb{R}$, partie entière d'un nombre réel.

Approximation décimale d'un réel à 10^{-n} près par défaut, par excès.

Définition de la densité d'une partie A dans $\mathbb{R}$, densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Caractérisation séquentielle de la densité.

VI Dénombrabilité

Définition de la dénombrabilité.

Partie d'un ensemble dénombrable, union d'ensembles dénombrables.

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne le sont pas.

Questions de cours

- Q1.** Démontrer (sans utiliser la caractérisation « en ε ») que si A et B sont des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, alors $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ admet une borne supérieure et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- Q2.** Énoncé et démonstration de la caractérisation « en ε » des bornes supérieures et inférieures.
- Q3.** Démontrer (en utilisant la caractérisation « en ε ») que si A et B sont des parties non vides minorées de $\mathbb{R}$, alors $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ admet une borne inférieure et $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- Q4.** Énoncé et démonstration du caractère archimédien de $\mathbb{R}$. Application à la définition de la partie entière.
- Q5.** Démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (à partir des propriétés de la partie entière). En déduire celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Q6.** Caractérisation séquentielle de la densité : une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A .
- Q7.** Déterminer les morphismes croissants de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
- Q8.** Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
- Q9. facultatif** Démontrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Q10. facultatif** Démontrer qu'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est soit dense soit de la forme $a \cdot \mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

À venir : suites à valeurs réelles.