Suites de nombres complexes

Définition d'une suite à valeurs complexes ; convergence ; opérations sur les limites ; lien avec les suites parties réelle et imaginaire ; suite extraite, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Limites d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

I. Limites définition d'une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$; unicité ; exemples. Limites infinies. Propriété vérifiée par une fonction au voisinage de a. Caractère local de la notion de limite. Application au propriétés locales d'une fonction ayant une limite finie.
Applications : si $|f-\lambda|$ est majorée au voisinage de a par une fonction g qui tend vers 0 en a, alors f admet pour limite λ en a ; si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a ; si de plus cette limite vérifie $m < \lambda < M$, alors on a $m < f < M$ au voisinage de a.
Limites à gauche et à droite en $a \in I$: définitions ; f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en a et si ces limites coïncident.
II. Opérations et limites : somme, produit, quotient de fonctions ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Composition : limite de la composée d'une fonction et d'une suite. Caractérisation séquentielle de la limite. Limite et composition de fonctions.
III. Limites et relations d'ordre sur $\mathbb{R}$: si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, relation entre les limites -si elles existent- de f et g. Théorèmes d' encadrement. Limite aux bornes de fonctions monotones.
IV. Limites de références : croissances comparées et limites classiques en 0.

Relations de comparaison

I. Domination/Négligeabilité : définitions de f *dominée par* g et de f *négligeable devant* g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Traductions quantifiées, équivalence avec « au voisinage de a, $f = B \times g$ avec B bornée » et avec « au voisinage de a, $f = \varepsilon \times g$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ » . Caractérisation à l'aide du quotient f/g. Notations de Landau. Propriétés des opérations sur les fonctions.
II. Relation d'équivalence :
1. Définition ; « au voisinage de a, $f = \alpha \times g$ avec $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = A$ » . Caractérisation par le quotient f/g. Notation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Signification sur f du cas $g = 0$.
2. Opérations sur les équivalents.
3. Obtention : cas où f est dérivable en a. Équivalents classiques en 0.
4. Substitution : si $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$ et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(u(t)) \underset{t\to\alpha}{\sim} g(u(t))$; applications. Attention : ne pas composer une relation d'équivalence !
5. Application à la recherche de limites : exemples.

Questions de cours

Pour chaque démonstration avec $a, b, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, l'examinateur·trice précisera un ou deux cas de son choix à traiter.

Q.1 Admettant le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites à valeurs réelles, le démontrer pour les suites à valeurs complexes.

Q.2 Limite de la somme de deux fonctions ayant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Q.3 Limite d'un produit de fonctions ayant une limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Q.4 Limite en a du produit $f(x) \times g(x)$ dans le cas où g est majorée par un réel $m < 0$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f tend vers $+\infty$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Q.5 Limite de la composée de deux fonctions.

Q.6 `[faculative]` Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.

Q.7 Limites aux bornes d'une fonction monotone sur un intervalle $]a; b[$.
L'examinateur·trice demandera un cas de son choix : croissante ou décroissante, en a ou en b, ces derniers appartenant à $\mathbb{R}$ ou non.

Q.8 Liste d'équivalents lorsque x tend vers 0 à connaître et à savoir justifier :

(a) $e^x - 1$;	(d) $\sin(x)$;	(g) $\arctan(x)$;
(b) $\ln(1+x)$;	(e) $\tan(x)$;	(h) $\mathrm{sh}(x)$;
(c) $(1+x)^\alpha - 1$;	(f) $\arcsin(x)$;	(i) $\mathrm{th}(x)$;

Q.9 Démonstrastion « directe » de $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \cdots$

Q.10 Énoncer et démontrer la formule de Taylor-Lagrange reste intégral à l'ordre 3 et l'utiliser pour démontrer que $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \cdots$

À venir : continuité sur un intervalle puis polynômes.