Relations de comparaison

Définitions et propriétés des relations de comparaisons (domination, négligeabilité, équivalence) pour les fonctions.

Opérations, croissances comparées et obtention classique d'équivalents en 0 (lorsque $f'(0) \neq 0$.)

Continuité

I. Continuité ponctuelle
Continuité ponctuelle, opérations, composition. Définition de la continuité sur un intervalle, structure d'espace vectoriel stable pour le produit de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Stabilité par passage à la valeur absolue, conséquence sur f^+, $\sup(f, g)$,

II. Théorème des valeurs intermédiaires
Énoncé, démonstration. Algorithme de recherche par dichotomie d'un zéro d'une fonction. Application à l'image continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Cas des fonctions continues monotones.

III.Image continue d'un segment
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, image d'un segment par une application continue.

IV. Continuité et bijection
Continuité et Injectivité pour une application continue.
Une application continue strictement monotone est une bijection (de…sur …) et son application réciproque est continue, de même monotonie. Image de l'intervalle de départ suivant les cas possibles. Homéomorphisme.

V. Fonctions u-continues et lipschitziennes
définitions, relation d'implication lipschitzienne/u-continue/continue.
Caractérisation séquentielle de l'u-continuité. Théorème de Heine.

VI. Exercices-Type
Existence de points fixes.
Suites récurrentes : cas d'une application f k-lipschitzienne avec $k < 1$: existence et unicité du point fixe, convergence et vitesse de convergence.
Morphismes continus.

Questions de cours

Q.1 Liste d'équivalents lorsque x tend vers 0 à connaître et à savoir justifier :

(a) $e^x - 1$;	(d) $\sin(x)$;	(g) $\arctan(x)$;
(b) $\ln(1 + x)$;	(e) $\tan(x)$;	(h) $\mathrm{sh}(x)$;
(c) $(1 + x)^\alpha - 1$;	(f) $\arcsin(x)$;	(i) $\mathrm{th}(x)$;

Q.2 Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (cas de $f(a)f(b) < 0$, deux méthodes, au choix, puis justifier le cas général).

Q.3 Écrire une fonction python qui détermine par dichotomie une valeur approchée à `eps` près du zéro d'une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Donner une idée de sa complexité.

Q.4 Démontrer qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Q.5 `[facultatif]` Démontrer que la réciproque d'une bijection continue sur un intervalle réel à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue.

Q.6 `[facultatif]`Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme.

Q.7 `[facultatif]` Démontrer le théorème de Heine.

Q.8 Soit f continue de $[a; b]$ à valeurs dans $[a; b]$. Démontrer que f admet un point fixe.

Q.9 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x)$.

Q.10 Montrer que si f est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f admet un unique point fixe.

Q.11 Définir (et le justifier) une fonction continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Q.12 Soit f k-lipschtzienne de $[a; b]$ à valeurs dans $[a; b]$ avec $0 < k < 1$. Démontrer que f admet un unique point fixe et que toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in [a; b]$ converge vers ce point fixe.

Q.13 Déterminer les morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, continus.

Q.14 En admettant le résultat de la question précédente, déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ et de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

À venir : polynômes.