

Espaces vectoriels

I. Structure d'espace vectoriel

- Définition** : espace vectoriel sur \mathbb{K} , vecteurs, scalaires.
- Exemples**.
- Règles opératoires** : relations entre loi externe et interne, sommation.
- Combinaisons linéaires** : définition, symbole de Kronecker, CNS pour qu'un vecteur d'une famille soit combinaison linéaire des autres. Familles libres, liées, exemples .

II. Sous-espace vectoriel

- Définition et premières propriétés** : définition, méthode pratique pour prouver que V est un s.e.v de E . Exemples dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Intersection de sous-espaces vectoriels** : l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. cas de la réunion.
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie** : définition et description de $\text{Vect}(P)$, cas où P est une famille finie de E , familles génératrices. Exemples.
- Somme de sous-espaces vectoriels** : définition de la somme de n s.e.v., notation $\bigoplus_{i=1}^n V_i$.

Notion de somme directe, notation $\bigoplus_{i=1}^n V_i$. Unicité de la décomposition. Concaténation de familles libres.

Cas particulier de deux sous-espaces. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , notation $E = V \oplus W$, existence et unicité de la décomposition d'un vecteur.

III. Applications linéaires (E, F, G \mathbb{K} -espaces vectoriels)

- Définition et premières propriétés** : application linéaire, endo/iso/auto-morphisme, ensembles $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire. Exemples. Forme linéaire.
- Composée et réciproque** : composée d'applications linéaires, linéarité de f^{-1} . $(\text{GL}(E), \circ)$ est un groupe.
- Image directe et réciproque** : image directe et réciproque d'un s.e.v par une application linéaire. Noyau, image de f . C.N.S. pour que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ soit une injection.
- Structures de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$** .

IV. Des éléments particuliers de $\mathcal{L}(E)$

Homothéties, projecteurs et symétries. Définition de la projection sur un s.e.v parallèlement à un s.e.v supplémentaire : c'est un projecteur. Idem avec les symétries. Propriétés.

Questions de cours

- Si U et V sont deux s.e.v. de E , alors $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Si U et V sont deux s.e.v. de E , alors $U + V$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Démontrer que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. de $E = \mathbb{R}^3$.
- Avec les notations de la question précédente, démontrer que $E = V \oplus W$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- Si f est un isomorphisme de E sur F , alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et U est un s.e.v. de E , alors $f(U)$ est un s.e.v. de F .
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et V est un s.e.v. de F , alors $f^{-1}(V)$ est un s.e.v. de E .
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, f est une injection de E dans F si et ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- [facultatif] Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si W est un s.e.v de E supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , alors W est isomorphe à $\text{Im}(f)$.
- Définir la projection vectorielle sur V parallèlement à W et montrer qu'elle est linéaire et que c'est un projecteur.
- Si p est un projecteur vectoriel de E (i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$), alors $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et $x \in \text{Im}(p)$ si et seulement si $p(x) = x$.
- Définir la symétrie vectorielle par rapport à V parallèlement à W et montrer qu'elle est linéaire et que c'est une symétrie.
- Si s est une symétrie vectorielle de E ($s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{Id}_E$), alors $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$.
- [facultatif] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ note $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$, et $K_p = \ker(f^p)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $K_p \subset K_{p+1}$, et que si $K_p = K_{p+1}$, alors $K_{p+1} = K_{p+2}$.
- [facultatif] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ note $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$, et $I_p = \text{Im}(f^p)$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_{p+1} \subset I_p$, et que si $I_{p+1} = I_p$, alors $I_{p+1} = I_{p+2}$.
- [facultatif] Donner un exemple d'application linéaire telle $K_2 = K_1$ et $I_2 \neq I_1$ (notations des questions précédentes).
- [facultatif] Donner un exemple d'application linéaire telle $K_2 \neq K_1$ et $I_2 = I_1$ (notations des questions précédentes).

À venir : dérivabilité sur un intervalle, analyse asymptotique...