Fonctions continues sur un intervalle

Dérivabilité sur un intervalle

I. Dérivabilité ponctuelle

définition, nombre dérivée, fonction dérivée, Dérivabilité à droite et à gauche, lien avec la tangente en un point de la courbe représentative.

II. Opérations et dérivation

Dérivation de combinaison linéaire, multiplication, quotient de fonctions dérivables en un point.

Dérivabilité sur un intervalle, Structure de $D(I,\mathbb{R})$ et de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. sur un intervalle. Opérations et composition. Théorème de dérivation de l'application réciproque.

Notions de fonctions n-fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^{+\infty}$. Liens avec les opérations et la composition des fonctions. Formule de Leibniz.

III. Accroissements finis

1. Extrema locaux : condition nécessaire d'existence d'un extremum local en a pour f dérivable en a : $f'(a) = 0$. Cette condition n'est pas suffisante. Exemples.
2. Théorème de Rolle : énoncé ; interprétations graphique et cinématique.
3. Egalité des accroissements finis : énoncé ; interprétations graphique et cinématique. Ecriture "en $f(x+h)$".
4. Application au prolongement $\mathcal{C}^1$, au prolongement $\mathcal{C}^n$.
5. Inégalité des accroissements finis. Application : une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne sur ce segment.

IV. Variations d'une fonction

Liens entre monotonie et signe de la dérivée d'une fonction dérivable. Obtention de bijections. Application aux tableaux de variations de fonctions dérivables. Exemples.

V. Retour sur les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Questions de cours

Q.1 Dérivabilité et expression de la dérivée d'une somme, d'un produit.

Q.2 Théorème de dérivation des fonctions composées.
Application à f^p, à $\dfrac{1}{f}$.

Q.3 Formule de Leibniz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$: énoncé et démonstration.

Q.4 Étude de la classe de dérivabilité de $f : x \mapsto \begin{cases} x^2(1-x)^2 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Q.5 Montrer que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ *(et composables)*, alors $g \circ f$ est aussi.

Q.6 Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Q.7 Énoncé et démonstration de la condition nécessaire d'extrémalité pour une fonction dérivable.

Q.8 Énoncé et démonstration du théorème de Rolle.

Q.9 Énoncé et démonstration du théorème de l'égalité des accroissements finis.

Q.10 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a;b]$.
Montrer que f est lipschitzienne sur $[a;b]$.

Q.11 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a;b]$ telle que f et f' admettent des limites finies en a. Démontrer que f est alors prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$.

Q.12 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

À venir : formules de Taylor, analyse asymptotique...