

## Formules de Taylor

### Développements limités

#### I. Développement limités en 0 (1) : définition

Définition, unicité du développement limité ( $DL_n(0)$ ) à l'ordre  $n$  en 0 d'une fonction.

Application fondamentale : recherche d'équivalents.

Exemples fondamentaux :

- $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  ;
- fonctions usuelles par Taylor-Young :  
 $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ , etc...

#### II. Développements limités en 0 (2) : méthodes d'obtention

« Lemme technique » : si  $u(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} a_p t^p$  avec  $p \geq 1$  et  $a_p \neq 0$ ,

alors  $(u(t))^n \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon (u(t)) = o(t^{np})$  pour tout fonction  $\varepsilon$  de limite 0 en 0.

Sommes, combinaisons linéaires et produits.

Inverses et quotients.

Composition de DL, DL et application réciproque.

DL d'une primitive.

Le but est essentiellement de savoir calculer. Pour les compositions, les étudiants doivent savoir justifier l'ordre du dL à l'aide du « lemme technique ».

#### III. Développements limités autres qu'en 0 et applications

1) DL en  $a \in \mathbb{R}$ . Définition, obtention.

Application à l'étude des tangentes en un point et des positions relatives courbe/tangente.

Condition suffisante d'extrémalité à l'aide des dérivées successives.

2) DL en  $\pm\infty$ . Applications aux calculs de limites et d'équivalents.

3) Développements asymptotiques. Exemples d'autres échelles de développement.

Recherche d'asymptotes éventuelles et position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

## Questions de cours

Les étudiants doivent connaître par cœur les développements limités usuels en 0 ( $\exp(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\operatorname{sh}(x)$ ,  $\operatorname{ch}(x)$ , etc...) et mener à bien des calculs de développements limités.

**Q.1** Énoncé et démonstration du « lemme technique ».

**Q.2** Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de  $\tan$  en 0 en déterminant le développement limité d'un quotient.

**Q.3** Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de  $\tan$  en 0 en utilisant astucieusement le développement limité d'une primitive (2<sup>e</sup> méthode).

**Q.4** Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de  $\arctan$  en 0 et en déduire celui de  $\tan$  (3<sup>e</sup> méthode).

**Q.5** Application des développements limités à l'étude de la tangente en un point. Positions relatives. Condition suffisante d'extrémalité.

**Q.6** Application des développements asymptotiques à l'étude de branches infinies : recherche d'asymptotes, positions relatives.

---

À venir : espaces vectoriels de dimension finie.