Matrices représentatives

Ensembles finis - dénombrement

1. **Préliminaires :** relation d'équipotence, propriétés des applications sur les ensembles $[\![1,n]\!]$. Définition d'un ensemble fini.
2. **Cardinal d'un ensemble fini :** définition, premières propriétés. Résultats sur les parties de $\mathbb{N}$. Existence et unicité d'une bijection croissante entre une partie finie de $\mathbb{N}$ de cardinal p et $[\![1,p]\!]$.
   Deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal. Equivalence injection/surjection dans le cas d'ensembles de départ et d'arrivée de même cardinal.
3. **Réunions et partitions** $E \cup F$ est fini, $\mathrm{Card}(E \cup F)$.
   Union disjointe et partitions. Premier lemme des bergers.
4. **Utilisation d'applications** Partitionnement via une fonction, deuxième lemme des bergers. Application au produit cartésien : $E \times F$ est fini et calcul de $\mathrm{Card}(E \times F)$. Application à E^n.
5. **Ensembles d'applications** Dénombrement des applications : $\mathcal{F}(E,F)$ est fini, $\mathrm{Card}\left(\mathcal{F}(E,F)\right)$. Nombres de p-listes.
   Dénombrement des injections : défintion des arrangements ${A_n}^p$, interprétation en terme de nombres d'injections, de nombres de p-uplets. Expression factorielle. Nombre de permutations d'un ensemble fini. Interprétation en dénombrement.
6. **Ensemble de parties - combinaisons** révision : propriétés des coefficients binômiaux.
   Parties de E : définition de $\mathcal{P}_p(E)$, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$, dénombrement.
   Interprétation ensembliste de la formule du triangle de Pascal, du binôme de Newton, calcul de $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Questions de cours

Q1. Par une méthode de pivot uniquement sur les lignes, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Q2. Matrice représentative dans une base adaptée d'une symétrie. En déduire que s'il existe une symétrie de trace nulle, la dimension de l'espace est paire.

Q3. Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \cup F$ est fini et calcul du cardinal. *(On justifiera le cas d'une union disjointe pour commencer.)*

Q4. Lemmes des Bergers : deux énoncés et justification.

Q5. Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et calcul du cardinal.

Q6. `[facultatif]` Si E et F sont des ensembles finis, alors $\mathrm{Card}\left(\mathcal{F}(E,F)\right)$ est fini et calcul du cardinal.

Q7. Énoncer et démontrer la formule factorielle des arrangements : $A_n^p = ...$

Q8. Donner une justification ensembliste de la formule $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Q9. Démonstration (ensembliste) de la formule du triangle de Pascal.

Q10. Donner une justification ensembliste de la formule du binôme de Newton.

Q11. Donner la formule de Vandermonde et en donner une justification ensembliste.

Q12. Si E est un ensemble fini, démontrer que $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal. En déduire qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

À venir : probabilités sur un ensemble fini