



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique, ingénierie et informatique (MP2I) et Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI)

Annexe 1

Programme de mathématiques

Classes préparatoires MPSI et MP2I

Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule	2
Objectifs de formation	2
Description et prise en compte des compétences	2
Unité de la formation scientifique	3
Architecture et contenu du programme	4
Organisation du texte	4
 Premier semestre	 6
Raisonnement et vocabulaire ensembliste	6
Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie	7
Nombres complexes	8
Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral	10
A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes	10
B - Primitives et équations différentielles linéaires	11
Nombres réels et suites numériques	12
Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité	13
A - Limites et continuité	14
B - Dérivabilité	15
C - Convexité	16
Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs	16
Structures algébriques usuelles	17
Calcul matriciel et systèmes linéaires	18
Polynômes et fractions rationnelles	19
 Deuxième semestre	 21
Analyse asymptotique	21
Espaces vectoriels et applications linéaires	22
A - Espaces vectoriels	23
B - Espaces de dimension finie	23
C - Applications linéaires	24
D - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel	26
Matrices	26
A - Matrices et applications linéaires	26
B - Changements de bases, équivalence et similitude	27
Groupe symétrique et déterminants	28
A - Groupe symétrique	28
B - Déterminants	28
Intégration	29
Dénombrement	30
Probabilités	31
A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois	31
B - Espérance et variance	32
Espaces préhilbertiens réels	33
Procédés sommatoires discrets	34
Fonctions de deux variables	36

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

En classe préparatoire scientifique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux autres disciplines scientifiques.

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes ;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé ;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur ;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.

Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. Les contenus du programme peuvent se répartir en trois champs : algèbre, analyse et probabilités. L'algèbre et l'analyse occupent le plus grand volume sur les deux semestres, tandis que les probabilités sont introduites au second semestre. Si la géométrie n'apparaît pas comme un champ autonome, son importance dans la représentation des objets du programme ne saurait être sous-estimée. Ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour l'étude des nombres complexes, l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions d'une variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.

L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec les autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Outre l'étude des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'une section spécifique, qui est exploitée ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation. Enfin, les familles sommables et les fonctions de deux variables préparent au programme de deuxième année.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste. L'accent mis sur cette notion permet de travailler rapidement avec des événements construits en termes de variables aléatoires.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.

Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés, TIPE).

Organisation du texte

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; il précise aussi certains points de terminologie et certaines notations. Il fixe clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs.

- Aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur, en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, trois sections jouent un rôle particulier.
 - La section « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Cette section n'a pas vocation à être enseignée d'un seul tenant ni en tout début de semestre.
 - Les sections « Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie » et « Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral » sont axées sur les techniques de calcul. La seconde est fondée sur des théorèmes admis à ce stade, mais démontrés plus loin dans le programme. Cette présentation en deux temps, destinée à faciliter les apprentissages, peut être modulée par le professeur.
- Susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux.
 - La section « Nombres complexes » permet l'étude algébrique et géométrique de ces nombres. Elle aborde des applications à la trigonométrie ainsi qu'une première approche des équations algébriques.
 - Les sections « Nombres réels et suites numériques » et « Limites, continuité, dérivabilité » fondent l'analyse réelle sur des bases solides.
 - La section « Calcul matriciel et systèmes linéaires » fournit le vocabulaire et les techniques de résolution des systèmes linéaires, et prépare l'algèbre linéaire du second semestre.
 - Par les possibilités qu'elle offre de combiner beaucoup d'idées et de techniques étudiées au cours du premier semestre, la section « Polynômes » constitue un objet d'étude pertinent pour la fin du semestre.

Le professeur organise l'enseignement de la manière qui lui semble la plus profitable, en gardant à l'esprit le fait que la maîtrise rapide des techniques de calcul est un impératif, notamment en vue de l'enseignement de physique-chimie. Les ensembles de nombres usuels \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sont supposés connus. Toute construction est hors programme.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Rudiments de logique

Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de \mathbb{N} sont hors programme.

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, \bar{A} et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

c) Applications et relations

Application d'un ensemble dans un ensemble.
Graphe d'une application.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .
Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .

Famille d'éléments d'un ensemble.
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.
Restriction et prolongement.
Image directe.
Image réciproque.

Notation $\mathbb{1}_A$.
Notation $f|_A$.
Notation $f(A)$.
Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.

Composition.
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.
Relation binaire sur un ensemble.
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.

Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

La notion d'ensemble quotient est hors programme.
Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent.
Congruences dans \mathbb{R} , dans \mathbb{Z} . Notation $a \equiv b [c]$.

Relation d'ordre. Ordre partiel, total.

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme;
- résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot;
- manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations;
- utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.

a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

Exemples de sommes triangulaires.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Formule du binôme dans \mathbb{R} .

b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans \mathbb{R}^2 , de plans dans \mathbb{R}^3 .

Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.

Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

c) Inégalités

Relation d'ordre sur \mathbb{R} . Compatibilité avec les opérations.
Intervalles de \mathbb{R} .

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Dans \mathbb{R} , parties majorées, minorées, bornées.
Majorant, minorant; maximum, minimum.
Partie entière d'un nombre réel.

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq b$.

Notation $\lfloor x \rfloor$.

d) Trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.

Relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R} .

Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.

Cosinus et sinus des angles usuels.

Notation $a \equiv b [2\pi]$.

Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.

On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.

Fonctions circulaires cosinus et sinus.

On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

Fonction tangente.

Notation \tan . Dérivée, variations, représentation graphique.

Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.

Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps \mathbb{C} et la notion d'équation algébrique;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

La construction de \mathbb{C} est hors programme.

On identifie \mathbb{C} au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Module.

Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Image du conjugué dans le plan complexe.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Formule de Moivre.

Notation \cup .

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} . Somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation \cup_n .
Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

L'étude générale des similitudes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.
La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $\exp(x) \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$.

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur \mathbb{R}_+^* et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur \mathbb{R}_-^* .

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Fonctions hyperboliques sh, ch, th.

Dérivée, variations, représentation graphique.
Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

B - Primitives et équations différentielles linéaires

a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Intégration par parties, changement de variable.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction a est constante.

où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Équation homogène associée.

où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.
Principe de superposition.
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

a) Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.
Approximations décimales d'un réel.

Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de \mathbb{R}) sont hors programme.
Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

Tout intervalle ouvert non vide rencontre \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de \mathbb{R} .
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).
Une partie X de \mathbb{R} est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Notations $\sup X$, $\inf X$.

c) Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

d) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.
Unicité de la limite.
Suite convergente, divergente.
Toute suite convergente est bornée.
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
Passage à la limite d'une inégalité large.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Notations $u_n \rightarrow \ell$, $\lim u_n$.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

e) Suites monotones

Théorème de la limite monotone.

Théorème des suites adjacentes.

f) Suites extraites

Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ .

Principe de démonstration par dichotomie.

g) Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de \mathbb{R} .

Caractérisation séquentielle de la densité.

Une partie de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.

Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de \mathbb{R} , il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).

Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).

h) Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

i) Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n) , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f .

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité

Dans cette section, on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle et on développe l'étude des fonctions convexes amorcée en terminale. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-e), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]a, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, a[$ si $a = -\infty$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra en particulier présenter la méthode de Newton. De même, l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'Euler.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Unicité de la limite.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Notations $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite.

Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Principe de démonstration par dichotomie.

La démonstration n'est pas exigible.

La démonstration n'est pas exigible.

d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
La dérivabilité entraîne la continuité.
Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.
Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.
Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.
Égalité des accroissements finis.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.

Interprétations géométrique et cinématique.
La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.
Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.

La fonction f' est alors continue en a .

d) Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe \mathcal{C}^k .
Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

e) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe \mathcal{C}^1 .

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

C - Convexité

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments x_1, \dots, x_n de I .

Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Interprétation géométrique.

Tout développement général sur les barycentres est hors programme.

b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans \mathbb{Z} , diviseurs, multiples.
Théorème de la division euclidienne.

Caractérisation des couples d'entiers associés.

b) PGCD et algorithme d'Euclide

PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.

Algorithme d'Euclide.

Extension au cas de deux entiers relatifs.

Relation de Bézout.

PPCM.

Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans \mathbb{N}) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b .

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$.

$a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb .

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Notation $a \vee b$.

c) Entiers premiers entre eux

Couple d'entiers premiers entre eux.

Théorème de Bézout.

Lemme de Gauss.

Si a et b sont premiers entre eux et divisent n , alors ab divise n .

Si a et b sont premiers à n , alors ab est premier à n .

PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Forme irréductible d'un rationnel.

d) Nombres premiers

Nombre premier.

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Pour p premier, valuation p -adique.

Valuation p -adique d'un produit.

Crible d'Ératosthène.

Notation $v_p(n)$.

Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p -adiques.

Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p -adiques.

e) Congruences

Relation de congruence modulo un entier sur \mathbb{Z} .

Opérations sur les congruences : somme, produit.

Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n .

Petit théorème de Fermat.

Notation $a \equiv b [n]$.

Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.

Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

a) Loi de composition interne

Loi de composition interne.

Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.

Partie stable.

On évite l'étude de lois artificielles.

Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.

b) Structure de groupe

Groupe.

Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif.

Exemples usuels : groupes additifs \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , groupes multiplicatifs \mathbb{Q}^* , \mathbb{Q}_+^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{R}_+^* , \mathbb{C}^* , \cup , \cup_n .

Notation S_X .

Groupe des permutations d'un ensemble.

Groupe produit.

Sous-groupe : définition, caractérisation.

Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.

Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.

Notations $\text{Im } f$, $\text{Ker } f$.

Isomorphisme.

c) Structures d'anneau et de corps

Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} .
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau. Anneau intègre. Corps. Sous-anneau. Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	Les corps sont commutatifs.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps \mathbb{K} . Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires. Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. Notation A^\top .

b) Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.

c) Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé. Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

e) Anneau des matrices carrées

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire. Matrices symétriques, antisymétriques. Formule du binôme. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	Notation I_n . Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Application au calcul de puissances.

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.
Inverse d'une transposée.
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Notation $GL_n(\mathbb{K})$.

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.

Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre. Par exemple :

- l'étude des équations algébriques enrichit le calcul algébrique et suggère des problèmes de localisation des racines, mettant en jeu des techniques analytiques dans le cas réel, plus géométriques dans le cas complexe;
- l'interpolation de Lagrange permet de reconstituer un polynôme en fonction de ses valeurs en suffisamment de points et donne lieu à des problèmes issus de la théorie de l'approximation (majoration de l'erreur d'interpolation).

L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de \mathbb{Z} , ce qui autorise un exposé allégé. Le programme se limite au cas où le corps de base \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.
Degré d'une somme, d'un produit.
Composition.

La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.
Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
Multiplicité d'une racine.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).

Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».
Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants; les autres doivent être retrouvées rapidement.

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.
Formule de Taylor polynomiale.
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.
Algorithme d'Euclide.

Relation de Bézout.

PPCM.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B .

L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Notation $A \vee B$.

Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans \mathbb{Z} .

f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.

Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

g) Formule d'interpolation de Lagrange

Si x_1, \dots, x_n sont des éléments distincts de \mathbb{K} et y_1, \dots, y_n des éléments de \mathbb{K} , il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i .

Expression de P .

Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i .

h) Fractions rationnelles

Corps $\mathbb{K}(X)$.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.

i) Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue.

Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.

Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X - \lambda}$.

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Deuxième semestre

Le deuxième semestre s'organise autour de trois objectifs majeurs.

- Introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
- Prolonger les sections d'analyse du premier semestre par l'étude de l'analyse asymptotique, de l'intégration sur un segment, des séries numériques, des familles sommables et par une brève introduction aux fonctions de deux variables.
- Consolider et enrichir les notions relatives aux variables aléatoires sur un univers fini introduites au lycée.

Le professeur a la liberté d'organiser l'enseignement du semestre de la manière qui lui semble la mieux adaptée. Il est cependant fortement préconisé de traiter la section « Analyse asymptotique » en début de semestre et la section « Fonctions de deux variables » à la fin.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux sections. La première étudie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires ; la seconde fait le lien avec le calcul matriciel. Cette séparation n'est qu'une commodité de rédaction et le professeur peut organiser l'ensemble comme il le souhaite.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Relations de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de \mathbb{R} .
Lien entre ces relations.

Notations

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)), f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x).$$

La relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement.

Pour la relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes

$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \rightarrow 0$.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α , $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.

Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O .

Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f , g , h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

b) Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.

Signe de f au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe \mathcal{C}^n , développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan.

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.

La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;
- présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels

Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.	Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de \mathbb{K} -espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

b) Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A .	Notations $\text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{Vect}(A)$.

c) Familles de vecteurs

Famille (partie) génératrice.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre.
Famille (partie) libre, liée.	Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

C - Applications linéaires**a) Généralités**

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.

Noyau d'une application linéaire.

Caractérisation de l'injectivité.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.

Application linéaire de rang fini.

Notation $\text{rg}(u)$.

Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.
Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.
Automorphismes. Groupe linéaire.

Notations id_E , id .

Non commutativité si $\dim E \geq 2$.

Notation νu pour la composée $\nu \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Notation $\text{GL}(E)$.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.

e) Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Formes coordonnées relativement à une base.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel; cas des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , des droites et plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .

L'étude de la dualité est hors programme.

D - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :

- montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.
- modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.

Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.

Intersection de sous-espaces affines.

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\text{Ker } u$.

L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Sous-espaces affines de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.

Matrices

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.

Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.

Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de \mathbb{C} vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.

Cas particulier des endomorphismes.

b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Noyau, image et rang d'une matrice.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace \mathbb{K}^n ou si et seulement si son rang est n .

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n .

Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Lien entre les diverses notions de rang.

c) Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A .

Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Structure affine de l'ensemble des solutions.

Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

B - Changements de bases, équivalence et similitude**a) Changements de bases**

Matrice de passage d'une base à une autre.

Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

b) Matrices équivalentes et rang

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r .

Matrices équivalentes.

Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r .

Invariance du rang par transposition.

Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Application : calcul du rang.

c) Matrices semblables et trace

Matrices semblables.

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité de la trace, relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.

Interprétation géométrique.

Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Notation $\text{tr}(A)$.

Notation $\text{tr}(u)$.

Trace d'un projecteur.

Groupe symétrique et déterminants

A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.
Cycle, transposition.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.

Notation S_n .
Notation $(a_1 a_2 \dots a_p)$.
La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.

b) Signature d'une permutation

Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1 .

La démonstration n'est pas exigible.

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Formes n -linéaires alternées

Forme n -linéaire alternée sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .
Antisymétrie, effet d'une permutation.

La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n -linéaire alternée et si (x_1, \dots, x_n) est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si e est une base, il existe une unique forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n -linéaire alternée est un multiple de \det_e .
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.

Notation \det_e . La démonstration de l'existence n'est pas exigible.

Dans \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).

Comparaison, si e et e' sont deux bases, de \det_e et $\det_{e'}$.
La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.
Déterminant d'une composée.

Caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.
Déterminant d'un produit.

Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Caractérisation des matrices inversibles.
L'application \det induit un morphisme de $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{K})$) sur \mathbb{K}^* .
Déterminant d'une transposée.

Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

e) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.
Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
Déterminant d'une matrice triangulaire.
Déterminant de Vandermonde.

Lien avec les polynômes de Lagrange.

f) Comatrice

Comatrice.
Relation $A \operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$.

Notation $\operatorname{Com}(A)$.
Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Intégration

Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.

Le corps \mathbb{K} est pris égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Le professeur peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.

a) Continuité uniforme

Continuité uniforme.
Théorème de Heine.

Exemple des fonctions lipschitziennes.
La démonstration n'est pas exigible.

b) Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.
Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans \mathbb{K} .
Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} .

c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans \mathbb{K} .

Le programme n'impose pas de construction particulière.
Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.
Propriétés correspondantes.

Si f est continue, à valeurs dans \mathbb{R}^+ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

d) Sommes de Riemann

Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.

Démonstration exigible pour f lipschitzienne.

e) Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

f) Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.

On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$.

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

b) Listes et combinaisons

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n .

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini.

Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n -uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un n -uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.

Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, sur des permutations aléatoires (loi uniforme sur S_n), des graphes aléatoires, des inégalités de concentration...

Le programme de probabilités de première année s'achève sur une approche non asymptotique de la loi faible des grands nombres qui justifie l'approche fréquentiste des probabilités.

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Univers, événements, variables aléatoires

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.

On se limite au cas d'un univers fini.

Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).

Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .

Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.

b) Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini.

Espace probabilisé fini (Ω, P) .

Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leq x)$.

Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par E et de somme 1.

Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.

Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1.

Probabilité uniforme.

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.

La formule du crible est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

L'application P_B est une probabilité.

Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

Par convention, $P(A|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E .

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$.

On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Variable aléatoire $f(X)$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E .

Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Interprétation comme succès d'une expérience.

Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A .

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation $P(X = x, Y = y)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Famille finie d'événements indépendants.

Si A et B sont indépendants, A et \bar{B} le sont aussi.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Extension au cas de n événements.

f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$.

Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X .

Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.

Formule de transfert : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

L'espérance est un indicateur de position.

Formule $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.

Variable aléatoire centrée.

Exemple : $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n -uplets.

Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.

Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.

Covariance de deux variables aléatoires.

Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorréélées.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme, cas de variables décorréélées.

On retrouve la variance d'une variable binomiale.

c) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Application à l'obtention d'inégalités de concentration.

Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

a) Produit scalaire

Produit scalaire.

Espace préhilbertien, espace euclidien.

Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.

Expressions $X^T Y$, $\text{tr}(A^T B)$.

Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

b) Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Identité remarquable $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Exemples : sommes finies, intégrales.

Formule de polarisation associée.

c) Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.

Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Notation X^\perp .

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

d) Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.

Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F .

Distance d'un vecteur à F .

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F .

En dimension finie : dimension de F^\perp , vecteur normal à un hyperplan.

Notation $d(x, F)$.

En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\text{Vect}(u)^\perp$.

Procédés sommatoires discrets

L'étude des séries prolonge celle des suites et permet d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0, +\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.

On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.
Convergence, divergence, somme.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

Divergence grossière.

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

b) Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbb{R}^+ , si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

d) Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

e) Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.

Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .

La somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de \mathbb{R}^+ diverge.

Invariance de la somme par permutation.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathbb{R}^+ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Opérations : somme, multiplication par un réel positif.
 Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$.

Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.

On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.

La démonstration est hors programme.

f) Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i \in I}$ de \mathbb{C}^I est dite sommable si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Somme d'une famille sommable de nombres complexes.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_{i'})_{i' \in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{i' \in I'} b_{i'}.$$

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Notation $\ell^1(I)$.

Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries.

Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.

Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \varepsilon$.

Invariance de la somme par permutation.

La démonstration est hors programme.

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times) .

Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ouverts de \mathbb{R}^2 , fonctions continues

Boules de \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne canonique.

Ouverts.

Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} .

Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.

La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.

b) Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} .

Fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert.

Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe \mathcal{C}^1 :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Gradient d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Expression du développement limité à l'aide du gradient.

Notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Définition par la continuité des dérivées partielles.

La notion de fonction différentiable est hors programme.

Démonstration hors programme.

On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Notation $\nabla f(x_0, y_0)$.

Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

c) Dérivées partielles et composées

Dérivée selon un vecteur.

Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe \mathcal{C}^1 , la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$.

Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$.

Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f .

d) Extremums

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de \mathbb{R}^2 .

Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 est un point critique.

Exemples d'étude de points critiques.



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI)

Annexe 2

Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie MPSI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de MPSI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques préparant les étudiants à la deuxième année de classe préparatoire et, au-delà, à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences déjà travaillées au lycée inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ils auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de quatre thèmes : « ondes et signaux », « mouvements et interactions », « l'énergie : conversions et transferts » et « constitution et transformations de la matière ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise. La progression dans

les contenus disciplinaires est organisée en deux semestres. Pour faciliter la progressivité des acquisitions, au premier semestre les grandeurs physiques introduites sont essentiellement des grandeurs scalaires dépendant du temps et éventuellement d'une variable d'espace. Certains items de cette seconde partie, **identifiés en caractères gras**, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de MPSI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression pour chacun des deux semestres ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	<ul style="list-style-type: none"> - Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser/ Raisonner	<ul style="list-style-type: none"> - Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	<ul style="list-style-type: none"> - Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle.

	<ul style="list-style-type: none"> - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	<ul style="list-style-type: none"> - Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.
Communiquer	<ul style="list-style-type: none"> - À l'écrit comme à l'oral : <ul style="list-style-type: none"> o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente. o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation. o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.). - Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de l'**autonomie** et de l'**initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes favorisent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;

- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur première année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année. L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).

Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année durant les séances de travaux pratiques. Une séance de travaux pratiques s'articule autour d'une problématique, que les thèmes – repérés en gras dans la colonne « capacités exigibles »

de la partie « **Contenus thématiques** » du programme – peuvent servir à définir. Le travail de ces capacités et leur consolidation se poursuit en seconde année.

Dans le tableau ci-dessous, les différentes capacités à acquérir sont groupées par domaines thématiques ou transversaux. Cela ne signifie pas qu'une activité expérimentale se limite à un seul domaine. La capacité à former une image de bonne qualité, par exemple, peut être mobilisée au cours d'une expérience de mécanique ou de thermodynamique, cette transversalité de la formation devant être un moyen, entre d'autres, de favoriser l'autonomie et la prise d'initiative.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs et d'angles Longueurs : sur un banc d'optique.	Mettre en œuvre une mesure de longueur par déplacement d'un viseur entre deux positions.
Longueurs : à partir d'une photo ou d'une vidéo.	Évaluer, par comparaison à un étalon, une longueur (ou les coordonnées d'une position) sur une image numérique et en estimer la précision.
Angles : avec un goniomètre.	Utiliser un viseur à frontale fixe, une lunette autocollimatrice. Utiliser des vis micrométriques et un réticule.
Longueurs d'onde.	Étudier un spectre à l'aide d'un spectromètre à fibre optique. Mesurer une longueur d'onde optique à l'aide d'un goniomètre à réseau. Mesurer une longueur d'onde acoustique à l'aide d'un support gradué et d'un oscilloscope bicourbe.
2. Mesures de temps et de fréquences Fréquence ou période : mesure au fréquencemètre numérique, à l'oscilloscope ou <i>via</i> une carte d'acquisition.	Mettre en œuvre une méthode de mesure de fréquence ou de période.
Analyse spectrale.	Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition. Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.
Décalage temporel/déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.	Reconnaître une avance ou un retard de phase. Passer d'un décalage temporel à un déphasage et inversement. Repérer précisément le passage par un déphasage de 0 ou π en mode XY.

<p>3. Électricité</p> <p>Mesurer une tension :</p> <ul style="list-style-type: none"> - mesure directe au voltmètre numérique ou à l'oscilloscope numérique. <p>Mesurer l'intensité d'un courant :</p> <ul style="list-style-type: none"> - mesure directe à l'ampèremètre numérique ; - mesure indirecte à l'oscilloscope aux bornes d'une résistance adaptée. <p>Mesurer une résistance ou une impédance :</p> <ul style="list-style-type: none"> - mesure directe à l'ohmmètre/capacimètre ; - mesure indirecte à l'oscilloscope ou au voltmètre sur un diviseur de tension. 	<p>Capacités communes à l'ensemble des mesures électriques :</p> <ul style="list-style-type: none"> - expliquer le lien entre résolution, calibre, nombre de points de mesure ; - préciser la perturbation induite par l'appareil de mesure sur le montage et ses limites (bande passante, résistance d'entrée) ; - définir la nature de la mesure effectuée (valeur efficace, valeur moyenne, amplitude, valeur crête à crête, etc.).
<p>Produire un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF.</p>	<p>Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données.</p>
<p>Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ isolation, amplification, filtrage ; ○ sommation, intégration. 	<p>Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses.</p> <p>Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique.</p> <p>Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs.</p>
<p>4. Optique</p> <p>Former une image.</p>	<p>Éclairer un objet de manière adaptée.</p> <p>Choisir une ou plusieurs lentilles en fonction des contraintes expérimentales, et choisir leur focale de façon raisonnée.</p> <p>Optimiser la qualité d'une image (alignement, limitation des aberrations, etc.).</p> <p>Estimer une valeur approchée d'une distance focale.</p>
<p>Créer ou repérer une direction de référence.</p>	<p>Régler et mettre en œuvre une lunette autocollimatrice et un collimateur.</p>
<p>Analyser une image numérique.</p>	<p>Acquérir (webcam, appareil photo numérique, etc.) l'image d'un phénomène physique sous forme numérique, et l'exploiter à l'aide d'un logiciel pour conduire l'étude d'un phénomène.</p>
<p>5. Mécanique</p> <p>Mesurer une masse, un moment d'inertie.</p>	<p>Utiliser une balance de précision.</p> <p>Repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période.</p>

Visualiser et décomposer un mouvement.	Mettre en œuvre une méthode de stroboscopie. Enregistrer un phénomène à l'aide d'une caméra numérique et repérer la trajectoire à l'aide d'un logiciel dédié, en déduire la vitesse et l'accélération.
Mesurer une accélération.	Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.
Quantifier une action.	Utiliser un dynamomètre.
6. Thermodynamique Mesurer une pression.	Mettre en œuvre un capteur, en identifiant son caractère différentiel ou absolu.
Mesurer une température.	Mettre en œuvre un capteur de température, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur. Mettre en œuvre un capteur infrarouge. Choisir le capteur en fonction de ses caractéristiques (linéarité, sensibilité, gamme de fonctionnement, temps de réponse), et du type de mesures à effectuer.
Effectuer des bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie.
7. Mesures de grandeurs en chimie Mesurer un volume, une masse, un pH, une conductance et une conductivité, une absorbance.	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Distinguer les instruments de verrerie In et Ex. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée à partir d'un solide, d'un liquide, d'une solution de composition connue avec le matériel approprié. Utiliser les méthodes et le matériel adéquats pour transférer l'intégralité du solide ou du liquide pesé. Utiliser les appareils de mesure (masse, pH, conductance) en s'aidant d'une notice. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.

8. Analyses qualitatives et quantitatives Effectuer des tests qualitatifs.	Proposer ou mettre en œuvre, à partir d'informations fournies, des tests qualitatifs préalables à l'élaboration d'un protocole.
Réaliser des dosages par étalonnage.	Déterminer une concentration en exploitant la mesure de grandeurs physiques caractéristiques de l'espèce ou en construisant et en utilisant une courbe d'étalonnage. Déterminer une concentration ou une quantité de matière par spectrophotométrie UV-Visible.
Réaliser des dosages par titrage. Titrages directs, indirects. Équivalence. Titrages simples, successifs, simultanés. Méthodes expérimentales de suivi d'un titrage : pH-métrie, conductimétrie, indicateurs colorés de fin de titrage.	Identifier et exploiter la réaction support du titrage (recenser les espèces présentes dans le milieu au cours du titrage, repérer l'équivalence, justifier qualitativement l'allure de la courbe ou le changement de couleur observé). Proposer ou justifier le protocole d'un titrage à l'aide de données fournies ou à rechercher. Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage direct ou indirect. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage.
Exploiter des courbes expérimentales de titrage.	Exploiter une courbe de titrage pour déterminer la concentration en espèce titrée. Utiliser un logiciel de simulation pour déterminer des courbes de distribution et confronter la courbe de titrage simulée à la courbe expérimentale. Distinguer l'équivalence et le repérage du virage d'un indicateur coloré de fin de titrage.
Mettre en œuvre des suivis cinétiques de transformations chimiques. Suivi en continu de l'évolution temporelle d'une grandeur physique.	Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en œuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.

<p>- Risque chimique Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.</p>	<p>Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.</p>
<p>- Risque électrique</p>	<p>Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.</p>
<p>- Risque optique</p>	<p>Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.</p>
<p>- Risques liés à la pression et à la température</p>	<p>Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.</p>
<p>4. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.</p>	<p>Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.</p>

Contenus thématiques

L'organisation des semestres est la suivante.

Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

- 1.1. Formation des images
- 1.2. Signaux électriques dans l'ARQS
- 1.3. Circuit linéaire du premier ordre
- 1.4. Oscillateurs libres et forcés
- 1.5. Filtrage linéaire
- 1.6. Propagation d'un signal

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

- 2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
- 2.2. Lois de Newton
- 2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel
- 2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (1)

- 4.1. Transformations de la matière
 - 4.1.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final
 - 4.1.2. Évolution temporelle d'un système chimique
- 4.2. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques
 - 4.2.1. Structure des entités chimiques
 - 4.2.2. Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques

Deuxième semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

- 2.5. Moment cinétique
- 2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif
- 2.7. Mouvement d'un solide

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

- 3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre
- 3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation
- 3.3. Premier principe. Bilans d'énergie
- 3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie
- 3.5. Machines thermiques

Thème 1 : ondes et signaux (2)

- 1.7. Induction et forces de Laplace
 - 1.7.1. Champ magnétique
 - 1.7.2. Actions d'un champ magnétique
 - 1.7.3. Lois de l'induction
 - 1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps
 - 1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire
- 1.8. Introduction à la physique quantique

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (2)

- 4.3. Structure et propriétés physiques des solides
- 4.4. Transformations chimiques en solution aqueuse
 - 4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation
 - 4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction

A. Premier semestre

Thème 1 : ondes et signaux (1)

La partie 1.1. « **Formation des images** » traite de la formation des images et propose une ouverture sur la notion de guidage de la lumière par une fibre optique. Cette partie est l'occasion d'interroger le concept de modèle en physique et d'en identifier les limites de validité. Elle permet également d'aborder de nombreuses applications technologiques ; certaines sont précisées par le programme, d'autres sont laissées à l'appréciation des enseignants (lunette, microscope, optique d'un smartphone, etc.). L'approche expérimentale doit être privilégiée dans ce domaine de la physique qui s'y prête particulièrement bien.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Formation des images	
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.

Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
Conditions de l'approximation de Gauss et applications Stigmatisme. Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

La partie **1.2. « Signaux électriques dans l'ARQS »** pose les bases nécessaires à l'étude des circuits dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS). Si le programme se concentre sur l'étude des dipôles R, L et C, il est possible, lors des travaux pratiques, de faire appel à des composants intégrés ou non linéaires (filtres à capacité commutée, échantillonneur-bloqueur, diodes, photorésistances, etc.) dès lors qu'aucune connaissance préalable n'est nécessaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS	

Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit. Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.

Les deux parties **1.3. « Circuit linéaire du premier ordre »** et **1.4. « Oscillateurs libres et forcés »** abordent l'étude des circuits linéaires du premier et du second ordre en régime libre puis forcé. Il s'agit avant tout de comprendre les principes des méthodes mises en œuvre et leur exploitation pour étudier le comportement d'un signal traversant un système linéaire. Le choix a été fait de présenter simultanément les oscillateurs électriques et mécaniques de manière à mettre l'accent sur les analogies formelles et comportementales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.3. Circuit linéaire du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.

	<p>Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.</p> <p>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.</p> <p><u>Capacité numérique</u> : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.</p>
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

	<p>Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.</p> <p>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.</p>
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	<p>Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.</p> <p>Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.</p> <p>Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.</p>

L'objectif principal de la partie **1.5. « Filtrage linéaire »** n'est pas de former les étudiants aux aspects techniques des calculs des fonctions de transfert et des tracés de diagrammes de Bode mais de mettre l'accent sur l'interprétation des propriétés du signal de sortie connaissant celles du signal d'entrée et d'appréhender le rôle central de la linéarité des systèmes utilisés.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	<p>Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal.</p> <p>Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.</p> <p>Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.</p>

<p>Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.</p>	<p>Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.</p> <p>Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.</p>
<p>Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.</p>	<p>Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).</p> <p>Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.</p> <p>Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.</p> <p><u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.</p>

Dans la partie 1.6. consacrée à la « **Propagation d'un signal** », il est recommandé de s'appuyer sur une approche expérimentale ou sur des logiciels de simulation pour permettre aux étudiants de faire le lien entre l'observation de signaux qui se propagent et la traduction mathématique de cette propagation, sans qu'aucune référence ne soit faite à une équation d'onde. L'étude de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence et du phénomène d'interférences associé permet de mettre en évidence le rôle essentiel joué par le déphasage entre les deux signaux dans le signal résultant. L'étude des interférences lumineuses est l'occasion d'introduire la notion de différence de chemin optique et de la relier au déphasage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.6. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$. Écrire les signaux sous la forme $f(t-x/c)$ ou $g(t+x/c)$. Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
Phénomène d'interférences Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.

Thème 2 : mouvements et interactions (1)

La partie 2.1. « **Description et paramétrage du mouvement d'un point** » vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte

relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.

Dans la partie **2.2.** intitulée « **Lois de Newton** », on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilans de forces ou de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(G)$.
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur.
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

La partie 2.3. « **Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.

Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

La partie **2.4. « Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires »** introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ

	magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (1)

4.1. Transformations de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie courante, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

Les concepts développés dans la partie **4.1.1. « Description d'un système et de son évolution vers un état final »** permettent d'envisager l'optimisation des transformations ou des analyses. L'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, est réalisée à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique symbolisée par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final.

Les compétences relatives à cette partie du programme sont ensuite réinvesties au cours de l'année, plus particulièrement au second semestre lors des transformations en solution aqueuse, et en seconde année, notamment dans le cadre de la thermodynamique chimique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1.1. Description d'un système et de son évolution vers un état final	
Système physico-chimique Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Composition d'un système physico-chimique Variables intensives et extensives.	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes.
Transformation chimique d'un système Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée.
Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	Déterminer une constante d'équilibre.

Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient réactionnel, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient réactionnel. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique ou de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. <u>Capacité numérique</u> : déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

La partie **4.1.2. « Évolution temporelle d'un système chimique »** permet de dégager expérimentalement les facteurs cinétiques concentration et température. Cette mise en évidence est prolongée par les premières modélisations macroscopiques d'évolution des concentrations avec des lois de vitesse d'ordre simple et d'influence de la température avec la loi d'Arrhenius. Les déterminations d'ordre global ou apparent mettent en œuvre la méthode différentielle ou intégrale, et peuvent s'effectuer à l'aide de logiciels dédiés ou de programmes élaborés en langage de programmation, pour l'exploitation des mesures expérimentales dans le cadre d'un réacteur fermé parfaitement agité.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1.2. Évolution temporelle d'un système chimique	
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Vitesses de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique supposée sans accumulation d'intermédiaires.	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.

<p>Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi-réaction.</p>	<p>Exprimer la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques.</p> <p>Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.</p>
<p>Loi d'Arrhenius ; énergie d'activation.</p>	<p>Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures.</p> <p>Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.</p>

4.2. Relations entre la structure des entités chimiques et les propriétés physiques macroscopiques

Décrivant la matière au niveau macroscopique par des espèces chimiques aux propriétés physiques et chimiques caractéristiques, le chimiste la modélise au niveau microscopique par des entités chimiques dont les structures électroniques et géométriques permettent d'interpréter et de prévoir ces propriétés.

La partie **4.2.1 « Structure des entités chimiques »** aborde l'étude de la constitution de la matière au niveau microscopique en s'appuyant sur le tableau périodique des éléments, outil essentiel du chimiste, dans l'objectif de développer progressivement les compétences relatives à l'utilisation des informations qu'il contient pour prévoir, dans cette partie, le nombre de liaisons d'un atome et la nature (polaire, ionique) des liaisons chimiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.1 Structure des entités chimiques	
<p>Modèle de la liaison covalente Liaison covalente localisée. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou d'un ion polyatomique pour les éléments des blocs s et p.</p>	<p>Citer les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes. Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Établir un schéma de Lewis pertinent pour une molécule ou un ion. Identifier les écarts à la règle de l'octet.</p>
<p>Géométrie et polarité des entités chimiques Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.</p>	<p>Associer qualitativement la géométrie d'une entité à une minimisation de son énergie. Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique.</p>

	Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique donnée d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule de géométrie donnée.
--	---

La partie 4.2.2. « Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques » a pour objectif de permettre l'identification des interactions entre entités moléculaires ou ioniques afin d'interpréter, de prévoir ou de comparer certaines propriétés physiques : température de changement d'état, miscibilité, solubilité.

De nombreuses illustrations et applications dans la vie courante, au niveau du laboratoire ou dans le domaine du vivant peuvent être proposées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2.2. Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques	
Interaction entre entités Interactions de van der Waals. Liaison hydrogène ou interaction par pont hydrogène.	Citer les ordres de grandeur énergétiques des interactions de van der Waals et de liaisons hydrogène. Interpréter l'évolution de températures de changement d'état de corps purs moléculaires à l'aide de l'existence d'interactions de van der Waals ou par pont hydrogène.
Solubilité ; miscibilité. Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.

B. Second semestre

Thème 2 : mouvements et interactions (2)

Au second semestre, le thème « **Mouvements et interactions** » est structuré en trois parties : moment cinétique, mouvements dans un champ de force centrale conservatif et mouvement d'un solide.

La partie **2.5. « Moment cinétique »** est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. L'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.5. Moment cinétique	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

La partie **2.6. « Mouvements dans un champ de force centrale conservatif »** est notamment motivée par ses nombreuses applications possibles. On discute la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et, dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler), on ne poursuit l'étude que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif	
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
Cas particulier du champ newtonien Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.

Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Satellites terrestres Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Concernant le solide en rotation autour d'un axe fixe dans la partie **2.7. « Mouvement d'un solide »**, il s'agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l'axe de rotation.

Des exemples de dynamique du solide sont introduits (translation et rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen), avec toutefois des limitations strictes : l'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme. L'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation est en mouvement est exclue.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.7. Mouvement d'un solide	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Thème 3 : l'énergie : conversions et transferts

Après avoir mis l'accent sur le passage fondamental d'une réalité microscopique à des grandeurs mesurables macroscopiques, la partie propose, en s'appuyant sur des exemples concrets, de poursuivre la description et l'étude de la matière à l'échelle macroscopique, et d'aborder les deux principes fondamentaux de la thermodynamique. Les capacités identifiées doivent être introduites en s'appuyant dès que possible sur des dispositifs expérimentaux qui permettent ainsi leur acquisition progressive et authentique.

On utilise les notations suivantes : pour une grandeur extensive « A », « a » sera la grandeur massique associée et « A_m » la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre	
Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Libre parcours moyen.	Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de libres parcours moyens.
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.
Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz (homogénéité et isotropie). Vitesse quadratique moyenne. Température cinétique. Exemple du gaz parfait monoatomique : $E_c = 3/2kT$.	Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.

État d'équilibre d'un système soumis aux seules forces de pression. Pression, température, volume, équation d'état. Grandeur extensive, grandeur intensive. Exemples du gaz parfait et d'une phase condensée indilatable et incompressible.	Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique. Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température. Citer et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Énergie interne d'un système. Capacité thermique à volume constant dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'interprétation microscopique de la température. Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour un gaz parfait.
Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable.	Exploiter la propriété $U_m=U_m(T)$ pour une phase condensée incompressible et indilatable.
Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales.
Du gaz réel au gaz parfait.	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v).

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation	
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Définir un système adapté à une problématique donnée. Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformations isochore, monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Transferts thermiques. Transformation adiabatique. Thermostat, transformations monotherme et isotherme.	Distinguer qualitativement les trois types de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement. Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes modélisables par un thermostat.

Concernant les bilans d'énergie abordés dans la partie **3.3. « Premier principe. Bilans d'énergie »**, les expressions des fonctions d'état $U_m(T, V_m)$ et $H_m(T, P)$ sont données si le système ne relève pas du modèle gaz parfait ou du modèle de la phase condensée incompressible et indilatable.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Premier principe. Bilans d'énergie	
Premier principe de la thermodynamique.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail et transfert thermique. Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états voisins. Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique sur un chemin donné connaissant le travail et la variation de l'énergie interne.
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Justifier que l'enthalpie H_m d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T . Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases. Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie de fusion, etc.).

Concernant la partie **3.4. « Deuxième principe. Bilans d'entropie »**, l'expression de la fonction d'état entropie est systématiquement donnée et sa construction n'est pas une capacité visée. On cite sans aucun développement quantitatif son interprétation en termes de désordre statistique, de façon à faciliter une interprétation intuitive des bilans d'entropie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie	
Fonction d'état entropie.	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{ech} + S_{créé}$ avec $S_{ech} = \sum Q_i / T_i$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.

Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Cas particulier d'une transition de phase.	Citer et utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase : $\Delta h_{12}(T) = T \Delta s_{12}(T)$

Dans la partie **3.5. « Machines thermiques »**, l'enseignement de la thermodynamique est orienté vers des applications industrielles réelles et motivantes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.5. Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération. Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.

Thème 1 : Onde et signaux (2)

La partie **1.7. « Induction et forces de Laplace »** s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, carte RFID... Il s'agit de restituer toute la richesse de ces applications dans un volume horaire modeste, ce qui limite les géométries envisagées et le formalisme utilisé. Le point de vue adopté cherche à mettre l'accent sur les phénomènes et sur la modélisation sommaire de leurs applications. Toute étude du champ électromoteur est exclue. L'induction et les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. Ce dernier modèle permet d'introduire la notion de dipôle magnétique et une analogie de comportement permet de l'étendre au cas de l'aiguille d'une boussole.

Le succès de cet enseignement suppose le respect de ces limitations : il ne s'agit pas d'une étude générale des phénomènes d'induction. Corrélativement, l'enseignement de cette partie doit impérativement s'appuyer sur une démarche expérimentale authentique, qu'il s'agisse d'expériences de cours ou d'activités expérimentales.

La partie **1.7.1 « Champ magnétique »** vise à relier le champ magnétique et ses sources ; l'accent est mis sur le concept de champ vectoriel, l'analyse des symétries et des invariances, l'exploitation des représentations graphiques et la connaissance d'ordres de grandeur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.1. Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.

Dans la partie **1.7.2 « Actions d'un champ magnétique »**, l'enseignant est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. Il s'agit ici de se doter d'expressions opérationnelles pour étudier le mouvement dans un champ uniforme et stationnaire (soit d'une barre en translation, soit d'un moment magnétique en rotation modélisé par un cadre rectangulaire).

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.2. Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.

Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.
--	--

La partie **1.7.3 « Lois de l'induction »** repose sur la loi de Faraday qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui constitue un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On évoque, à ce sujet, les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.3. Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.
Loi de modulation de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'alébrisation.

La partie **1.7.4 « Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps »** aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps	
Auto-induction Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modulation de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale »
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

La partie 1.7.5 « **Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire** » est centrée sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser, par exemple, un dispositif de freinage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire	
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.

La partie 1.8. « **Introduction à la physique quantique** » est structurée autour de la présentation d'expériences réalisées depuis le début du XXème siècle. Cette partie vise à questionner la représentation classique du monde proposée dans les autres parties du programme. Les concepts essentiels abordés sont la dualité onde-particule, l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, l'inégalité de Heisenberg spatiale et la quantification de l'énergie dans les atomes. La réflexion sur les thèmes abordés ici est avant tout qualitative ; toute dérive calculatoire exploitant les concepts propres à la physique quantique doit être évitée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.8. Introduction à la physique quantique	
Dualité onde-particule pour la lumière et la matière Photon : énergie et impulsion.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Onde de matière associée à une particule. Relation de de Broglie.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière. Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.
Introduction au formalisme quantique Fonction d'onde : introduction qualitative, interprétation probabiliste.	Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.
Inégalité de Heisenberg spatiale.	Établir par analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, l'inégalité en ordre de grandeur : $\Delta p \Delta x \geq \hbar$.
Quantification de l'énergie Modèle planétaire de Bohr. Limites.	Exploiter l'hypothèse de quantification du moment cinétique orbital pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie électronique de l'atome d'hydrogène.

Thème 4 : constitution et transformations de la matière (2)

Les modèles de description microscopique des solides sont présentés dans la partie 4.3. « **Structure et propriétés physiques des solides** » à partir de l'observation et des propriétés macroscopiques de différents solides cristallisés que l'enseignant est libre de choisir. L'introduction du modèle du cristal parfait se fait sur l'exemple de la maille cubique à faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible ; l'ensemble des notions associées à cette première étude est réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution est alors fournie.

L'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites par ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (distances internucléaires et interatomiques, masse volumique, etc.). Ce chapitre constitue une occasion de revenir sur les positions relatives des éléments dans le tableau périodique, en lien avec la nature des interactions assurant la cohésion des édifices présentés, ainsi que sur les interactions intermoléculaires et la notion de solubilisation pour les solides ioniques et moléculaires. Une réflexion sur les modèles conduisant à la détermination des différents types de rayons à partir des méthodes expérimentales d'analyse des structures des solides peut être proposée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Structure et propriétés physiques des solides	
<p>Modèle du cristal parfait Solide amorphe, solide cristallin, solide semi-cristallin ; variétés allotropiques.</p>	<p>Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.</p>
<p>Description du cristal parfait ; population, coordinence, compacité, masse volumique. Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique.</p>	<p>Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie. Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée.</p> <p>Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.</p>
<p>Description des modèles d'empilement compact de sphères identiques.</p>	<p>Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement.</p>
<p>Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels.</p>	<p>Localiser, dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité.</p>
<p>Limites du modèle du cristal parfait.</p>	<p>Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.</p>
<p>Métaux Cohésion et propriétés physiques des métaux.</p>	<p>Positionner dans le tableau périodique et reconnaître les métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionnalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.</p>

Solides covalents et moléculaires Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des interactions par pont hydrogène (directionnalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants.
Solides ioniques Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques.	Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionnalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques.

4.4. Transformations chimiques en solution aqueuse

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie, dans le domaine du vivant et dans les procédés industriels. Un nombre considérable de développements technologiques et d'analyses environnementales (traitement des eaux, méthodes d'analyse, extraction d'ions métalliques des minerais, générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, etc) repose sur des transformations acido-basiques, de solubilisation-précipitation et d'oxydo-réduction en solution aqueuse dont la maîtrise est importante pour prévoir, interpréter et optimiser les phénomènes mis en jeu.

L'objectif de cette partie est donc de présenter différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de les utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé seront toujours précisées.

Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements. Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués précédemment. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.

Les différentes transformations en solution aqueuse abordées dans la partie **4.4.1. « Réactions acide-base et de précipitation »** constituent des illustrations de l'évolution des systèmes chimiques introduites au premier semestre, les étudiants étant amenés à déterminer l'état final d'un système en transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique. On montrera qu'il est ainsi possible d'analyser et de simplifier une situation complexe pour parvenir à la décrire rigoureusement et quantitativement, en l'occurrence dans le cas des solutions aqueuses par une seule réaction. Il est cependant important de noter qu'on évite tout calcul inutile de concentration, en privilégiant l'utilisation des diagrammes pour valider le choix de la réaction mise en jeu. Dans ce cadre, aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation	
Réactions acido-basiques - constante d'acidité ; - diagramme de prédominance, de distribution ; - exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et nature – faible ou forte – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, de la soude, l'ion	Identifier le caractère acido-basique d'une réaction en solution aqueuse. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH...) et des observations expérimentales.

<p>hydrogénocarbonate, l'ammoniac.</p> <p>Réactions de dissolution ou de précipitation</p> <ul style="list-style-type: none"> - constante de l'équation de dissolution, produit de solubilité K_s ; - solubilité et condition de précipitation ; - domaine d'existence ; - facteurs influençant la solubilité. 	<p>Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues.</p> <p>Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.</p> <p>Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution.</p> <p>Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires.</p> <p>Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable.</p> <p>Mettre en œuvre une réaction acide-base et une réaction de précipitation pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.</p> <p>Illustrer un procédé de retraitement, de recyclage, de séparation en solution aqueuse.</p>
--	--

L'analyse de transformations mettant en jeu des oxydants et réducteurs usuels et des piles permettent d'aborder, dans la partie **4.4.2. « Réactions d'oxydo-réduction »** les différents concepts associés aux phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. La relation de Nernst (admise en première année) ainsi que la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard permettent de prévoir l'évolution des systèmes et le caractère favorisé des transformations.

Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices présentes, les acquis sur les réactions acido-basiques et de précipitation-solubilisation en solution aqueuse sont réinvestis.

Enfin, les diagrammes potentiel-pH sont présentés puis superposés pour prévoir ou interpréter thermodynamiquement des transformations chimiques ; la confrontation avec la réalité amenant à aborder éventuellement des blocages cinétiques en lien avec l'évolution temporelle des systèmes étudiée au premier semestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction	
<p>Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction</p> <p>Nombre d'oxydation.</p> <p>Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom, nature et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du peroxyde d'hydrogène.</p>	<p>Relier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant.</p> <p>Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique.</p> <p>Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.</p>
<p>Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, formule de Nernst, électrodes de référence.</p>	<p>Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode.</p>
<p>Diagrammes de prédominance ou d'existence.</p>	<p>Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires.</p>

<p>Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médiامتutation.</p>	<p>Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples.</p> <p>Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.</p> <p>Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.</p>
<p>Diagrammes potentiel-pH Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH.</p>	<p>Identifier les différents domaines d'un diagramme fourni associés à des espèces chimiques données. Déterminer la valeur de la pente d'une frontière dans un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes.</p>
<p>Diagramme potentiel-pH de l'eau</p>	<p>Prévoir la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une dismutation ou médiامتutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques.</p> <p>Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation de diagrammes potentiel-pH.</p>

Annexe 1 : matériel

La liste ci-dessous regroupe le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée fournie sous forme de version papier ou numérique. Une utilisation de matériel hors de cette liste lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une introduction guidée suffisamment détaillée.

1. Domaine optique

- Goniomètre
- Viseur à frontale fixe
- Lunette auto-collimatrice
- Spectromètre à fibre optique
- Laser à gaz
- Lampes spectrales
- Source de lumière blanche à condenseur

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique
- Carte d'acquisition et logiciel dédié
- Générateur de signaux Basse Fréquence
- Multimètre numérique
- Multiplieur analogique

- Émetteur et récepteur acoustique (domaine audible et domaine ultrasonore)
- Microcontrôleur

3. Domaines mécanique et thermodynamique

- Dynamomètre
- Capteur de pression
- Accéléromètre
- Stroboscope
- Webcam avec logiciel dédié
- Appareil photo numérique ou caméra numérique
- Thermomètre, thermocouple, thermistance, capteur infra-rouge
- Calorimètre
- Machines thermiques dithermes

4. Domaine constitution et transformations de la matière

- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation, matériel de filtration sous pression atmosphérique et sous pression réduite
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Voltmètre et électrodes
- Conductimètre et cellule de mesure
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique comme en chimie.

La capacité à mettre en œuvre de manière autonome certains de ces outils mathématiques dans le cadre des activités relevant de la physique-chimie fait partie des compétences exigibles à la fin de la première année. Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que le niveau de maîtrise attendu en fin de première année. Il est complété dans le programme de seconde année.

Cependant les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité sont traitées à l'aide d'outils numériques (calculatrices, logiciels de calcul numérique).

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$ (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A \cdot \exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt .	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^\alpha$, e^x et $\ln(1+x)$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions \cos , \sin , \cos^2 et \sin^2 .
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Projection d'un vecteur et produit scalaire.	Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée.

	Utiliser la bilinéarité et le caractère symétrique du produit scalaire.
Produit vectoriel.	Interpréter géométriquement le produit vectoriel et connaître son expression en fonction des coordonnées dans une base orthonormée directe. Utiliser la bilinéarité et le caractère antisymétrique du produit vectoriel. Faire le lien avec l'orientation des trièdres.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.
Courbes planes.	Reconnaître l'équation cartésienne d'une droite, d'un cercle. Utiliser la représentation polaire d'une courbe plane ; utiliser un grapheur pour obtenir son tracé.
Courbes planes paramétrées.	Identifier une ellipse à l'aide de sa représentation paramétrique ($x = a \cdot \cos(\omega t)$, $y = b \cdot \cos(\omega t - \varphi)$) et la tracer dans les cas particuliers $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \pi$.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.
Barycentre d'un système de points.	Énoncer la définition du barycentre. Utiliser son associativité. Exploiter les symétries pour prévoir la position du barycentre d'un système homogène.
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.
6. Analyse vectorielle	
Gradient d'un champ scalaire.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Citer l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Citer l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes ; utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est

	perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
--	--

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous explicite ces outils ainsi que les capacités exigibles en fin de première année. Il sera complété dans le programme de physique-chimie de seconde année.

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour tracer une courbe plane paramétrée.
2. Équations algébriques	
Résolution d'une équation algébrique ou d'une équation transcendante : méthode dichotomique.	Déterminer, en s'appuyant sur une représentation graphique, un intervalle adapté à la recherche numérique d'une racine par une méthode dichotomique. Mettre en œuvre une méthode dichotomique afin de résoudre une équation avec une précision donnée. Utiliser la fonction bisect de la bibliothèque scipy.optimize (sa spécification étant fournie).
3. Intégration – Dérivation	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.
Calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point.	Utiliser un schéma numérique pour déterminer une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un point.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction odeint de la bibliothèque scipy.integrate (sa spécification étant fournie).

5. Probabilités – statistiques	
Variable aléatoire.	<p>Utiliser les fonctions de base des bibliothèques random et/ou numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire.</p> <p>Utiliser la fonction hist de la bibliothèque matplotlib.pyplot (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.</p> <p>Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.</p>
Régression linéaire.	<p>Utiliser la fonction polyfit de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données.</p> <p>Utiliser la fonction random.normal de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.</p>



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voies Mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur (MPSI) et Mathématiques et physique (MP)

Annexe 3

Programmes de sciences industrielles de l'ingénieur

PROGRAMME DE SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR DANS LA FILIÈRE MPSI-MP

1. Objectifs de formation

1.1. Finalité

Le programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la filière MPSI-MP s'inscrit dans un parcours de formation initiale pour accéder au titre d'ingénieur. Il trouve ses racines dans le choix de spécialités scientifiques au cycle terminal du lycée. L'objectif de ce programme est de proposer des contenus d'enseignements qui permettent de développer progressivement les compétences nécessaires à l'intégration dans une grande école et à l'exercice des métiers d'ingénieurs. Ce programme est ambitieux quant au développement de compétences scientifiques et technologiques qui soutiennent l'expertise du futur ingénieur. Il l'est aussi pour le développement de compétences transversales nécessaires pour communiquer, travailler en équipe, exercer un sens critique et des responsabilités de manière éthique et déontologique. En cohérence avec les objectifs du cycle initial de la formation aux métiers de l'ingénierie, ce programme contribue à la pédagogie par les STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

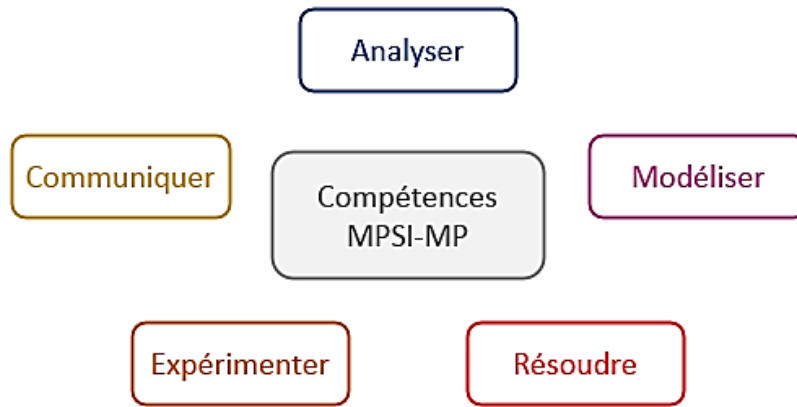
1.2. Objectifs généraux

Les ingénieurs doivent être en capacité de résoudre de façon innovante des problèmes inédits afin de répondre aux besoins des personnes et d'apporter un progrès dans leur qualité de vie. Ils participent aux processus de développement des systèmes à chaque étape de leur cycle de vie, de la caractérisation du besoin jusqu'au recyclage, en respectant les contraintes de développement durable et d'écoconception.

Cette capacité des ingénieurs à proposer des solutions innovantes est plus que jamais indispensable au développement d'une industrie capable de faire face aux grands enjeux sociétaux, économiques et environnementaux. Ces enjeux sont notamment ceux de la transition énergétique, la préservation de la qualité de l'environnement, la progression des technologies du numérique, la mutation des métropoles et des territoires, l'évolution des besoins alimentaires et des exigences en matière de santé pour des humains toujours plus nombreux sur notre planète. Dans un contexte de concurrence mondialisée, la capacité d'innovation des ingénieurs est nécessaire à l'industrie de notre pays qui doit demeurer compétitive et souveraine.

Les objectifs généraux du programme de MPSI-MP visent à développer les compétences clés dans le large domaine des sciences industrielles de l'ingénieur qui sont nécessaires à l'exercice du métier d'ingénieur. Celles-ci sont consolidées et complétées par la formation poursuivie jusqu'à l'obtention du titre d'ingénieur.

L'enseignement en MPSI-MP se donne également pour objectif d'apporter aux étudiants des méthodes et des outils qui leur permettront de s'adapter aux évolutions permanentes des sciences et des technologies et de communiquer avec l'ensemble des acteurs associés à l'exercice des métiers d'ingénieurs et scientifiques.

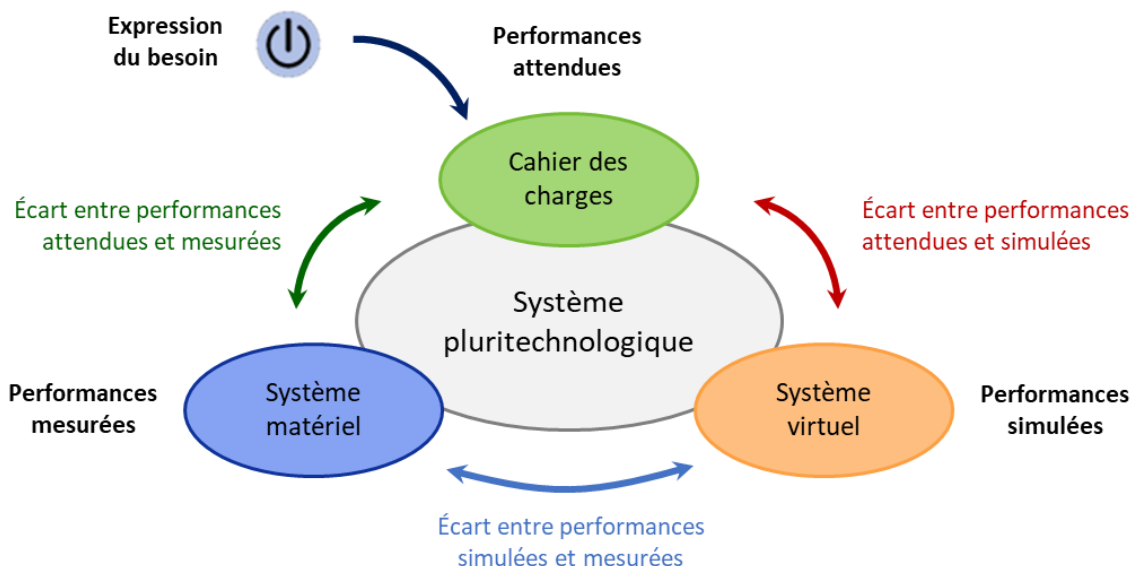


Les compétences générales de l'ingénieur développées en MPSI-MP

1.3. La démarche des enseignements en MPSI-MP

L'approche pédagogique et didactique des enseignements en MPSI-MP s'organise autour de systèmes pluritechnologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

- la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
- la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances ;
- la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.



La démarche pédagogique et didactique en sciences industrielles de l'ingénieur

Les objets et les systèmes, dans leur complexité, mobilisent plusieurs formes d'énergie et sont communicants. Ils sont pluritechnologiques.

La démarche en sciences industrielles de l'ingénieur en MPSI-MP vise à :

- s'approprier les trois réalités du système pluritechnologique (le cahier des charges, le système virtuel et le système matériel) ;
- comparer les performances issues de ces trois réalités ;
- optimiser le système virtuel et le système matériel afin de faire converger leurs performances vers celles attendues au cahier des charges.

Les contenus du programme de MPSI-MP permettent aux étudiants d'investir complètement la démarche de l'ingénieur en s'intéressant à toutes les représentations des systèmes. Pour cela les enseignements en MPSI-MP installent progressivement l'ensemble des connaissances et des compétences nécessaires à la maîtrise des différentes représentations d'un même objet ou système, à la comparaison des différentes performances, à l'optimisation des systèmes dans leurs réalités numérique et matérielle, afin de répondre aux attentes du client.

Des solutions innovantes sont modélisées de façon numérique. Ces modèles numériques permettent la simulation du comportement des systèmes pluritechnologiques afin d'obtenir des performances simulées. Une démarche expérimentale menée sur des systèmes existants vient enrichir les compétences des étudiants au service de la démarche de l'ingénieur. Elle permet la comparaison des performances simulées et mesurées avec celles attendues au cahier des charges afin d'optimiser tout ou partie du modèle numérique.

1.4. Usage de la liberté pédagogique

Le programme définit les obligations faites aux professeurs des contenus à enseigner, les mêmes pour tous les étudiants, garantes de l'équité d'une formation offrant à chacun les mêmes chances de réussite. Les finalités et objectifs généraux de la formation en sciences industrielles de l'ingénieur laissent aux enseignants le choix pédagogique de l'organisation des enseignements et de ses méthodes. La nature des enseignements en sciences industrielles de l'ingénieur suppose la mise en œuvre d'une didactique naturellement liée à la discipline qui impose une réflexion sur le développement des compétences, la transmission des connaissances et leur ordonnancement dans la programmation des apprentissages. Les supports d'enseignement sont choisis afin d'être représentatifs des solutions innovantes pour répondre aux besoins actuels. Les solutions contemporaines sont mises en perspective avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, avec les préoccupations de respect de l'environnement et des ressources naturelles, de façon à construire les bases d'une culture d'ingénieur éthique et responsable.

2. Programme

Le programme est organisé en cinq compétences générales déclinées en compétences attendues qui pourront être évaluées en fin de cycle.

Partant de ces indications de fin de cycle, le programme détaille les compétences développées, précise les connaissances associées et fournit un indicateur de positionnement temporel dans le cycle.

Les compétences développées et les connaissances associées sont positionnées dans les semestres, cela signifie :

- qu’elles doivent être acquises en fin du semestre précisé ;
- qu’elles ont pu être introduites au cours des semestres précédents ;
- qu’elles peuvent être mobilisées aux semestres suivants.

Les compétences générales et compétences attendues sont détaillées ci-dessous.

A – Analyser

- A1 – Analyser le besoin et les exigences
- A2 – Définir les frontières de l'analyse
- A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle
- A4 – Analyser les performances et les écarts

B – Modéliser

- B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser
- B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- B3 – Valider un modèle

C – Résoudre

- C1 – Proposer une démarche de résolution
- C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
- C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

D – Expérimenter

- D1 – Mettre en œuvre un système
- D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental
- D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

E – Communiquer

- E1 – Rechercher et traiter des informations
- E2 – Produire et échanger de l'information

Les liens avec l’enseignement d’informatique du tronc commun sont identifiés par le symbole \sphericalangle .

Les compétences identifiées par le signe (*) sont développées uniquement pour les MPSI option Sciences de l’Ingénieur au second semestre bénéficiant des 2 heures hebdomadaires d’activités pratiques à caractère expérimentale (TP).

A – Analyser

A1 – Analyser le besoin et les exigences

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Décrire le besoin et les exigences.	Ingénierie Système et diagrammes associés. Cahier des charges.	S1
<p><i>Commentaires</i> La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.</p>		

Traduire un besoin fonctionnel en exigences.	Impact environnemental. Analyse du cycle de vie (extraction, fabrication, utilisation, fin de vie, recyclage et transport). Critères et niveaux.	S1
Définir les domaines d'application et les critères technico-économiques et environnementaux.		
Qualifier et quantifier les exigences.		
Évaluer l'impact environnemental et sociétal.		
<p><i>Commentaire</i> Il s'agit de prendre en compte les exigences liées au développement durable et sensibiliser aux aspects sociétaux.</p>		

A2 – Définir les frontières de l'analyse

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Isoler un système et justifier l'isolement.	Frontière de l'étude. Milieu extérieur.	S2
Définir les éléments influents du milieu extérieur.		
Identifier la nature des flux échangés traversant la frontière d'étude.	Flux de matière, d'énergie et d'information (définition, nature et codage).	S2

A3 – Analyser l'organisation fonctionnelle et structurelle

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Associer les fonctions aux constituants.	Architecture fonctionnelle et structurelle.	S2
Justifier le choix des constituants dédiés aux fonctions d'un système.	Diagramme de définition de blocs. Diagramme de bloc interne. Chaines fonctionnelles (chaîne d'information et chaîne de puissance).	S4
Identifier et décrire les chaînes fonctionnelles du système.	Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.	S1
Identifier et décrire les liens entre les chaînes fonctionnelles.	Systèmes asservis et séquentiels.	S1
<p><i>Commentaires</i> <i>La description des chaînes fonctionnelles de différents systèmes permet de construire une culture technologique.</i> <i>Les chaînes fonctionnelles, diagrammes de définition de blocs et diagrammes de bloc interne peuvent être à lire ou à compléter avec les éléments syntaxiques fournis.</i></p>		

Caractériser un constituant de la chaîne d'information.	Capteurs : – fonctions ; – nature des grandeurs physiques d'entrées et de sorties ; – nature du signal et support de l'information.	S2
Analyser un algorithme. $\simeq I$	Définition et appel d'une fonction. Variables (type et portée). Structures algorithmiques (boucles et tests).	S1
Analyser les principes d'intelligence artificielle. $\simeq I$	Régression et classification, apprentissages supervisé et non supervisé. Phases d'apprentissage et d'inférence. Modèle linéaire monovarié ou multivarié. Réseaux de neurones (couches d'entrée, cachées et de sortie, neurones, biais, poids et fonction d'activation).	S3

Interpréter tout ou partie de l'évolution temporelle d'un système séquentiel.	Diagramme d'états. État, transition, événement, condition de garde, activité et action.	S2
Identifier la structure d'un système asservi.	Grandeurs d'entrée et de sortie. Capteur, chaîne directe, chaîne de retour, commande, comparateur, consigne, correcteur et perturbation. Poursuite et régulation.	S1
<p><i>Commentaires</i> <i>La connaissance de la syntaxe d'un langage d'Ingénierie Système n'est pas exigible. La structure des diagrammes d'Ingénierie Système (SysML) est fournie. Ils peuvent être proposés à lire ou à compléter.</i> <i>L'évolution temporelle des états et des variables d'un diagramme d'états est représentée sous la forme d'un chronogramme.</i></p>		

A4 – Analyser les performances et les écarts

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Extraire un indicateur de performance pertinent à partir du cahier des charges ou de résultats issus de l'expérimentation ou de la simulation.	Ordre de grandeur. Homogénéité des résultats. Matrice de confusion (tableau de contingence), sensibilité et spécificité d'un test.	S4
Caractériser les écarts entre les performances.		
Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement. $\Leftrightarrow I$		
Rechercher et proposer des causes aux écarts constatés.		

B – Modéliser

B1 – Choisir les grandeurs physiques et les caractériser

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Identifier les performances à prévoir ou à évaluer.	Grandeurs flux, grandeurs effort.	S4
Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle.		
Identifier les paramètres d'un modèle.		
Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation.		

B2 – Proposer un modèle de connaissance et de comportement

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un modèle adapté aux performances à prévoir ou à évaluer.	Phénomènes physiques. Domaine de validité. Solide indéformable.	S4
Compléter un modèle multiphysique.	Paramètres d'un modèle. Grandeurs flux et effort. Sources parfaites.	S3
Associer un modèle aux composants des chaînes fonctionnelles.		
<p><i>Commentaires</i> Un logiciel de modélisation multiphysique permettant d'assembler des composants technologiques issus d'une bibliothèque est privilégié pour la modélisation des systèmes pluritechnologiques. Les modèles mis en œuvre couvrent différents domaines (électrique, mécanique, thermique, hydraulique et pneumatique).</p>		

Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.	Systèmes linéaires continus et invariants : – causalité ; – modélisation par équations différentielles ; – transformées de Laplace ; – fonction de transfert ; – forme canonique ; – gain, ordre, classe, pôles et zéros.	S1
<p><i>Commentaires</i> <i>L'utilisation des transformées de Laplace ne nécessite aucun prérequis. Leur présentation se limite à leurs énoncés et aux propriétés du calcul symbolique strictement nécessaires. Les théorèmes de la valeur finale, de la valeur initiale et du retard sont donnés sans démonstration.</i></p>		

Modéliser le signal d'entrée.	Signaux canoniques d'entrée : – impulsion ; – échelon ; – rampe ; – signaux périodiques.	S1
Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. $\Leftrightarrow I$	Premier ordre, deuxième ordre, dérivateur, intégrateur, gain et retard. Paramètres caractéristiques. Allures des réponses indicielle et fréquentielle Diagramme de Bode.	S2
Modéliser un système par schéma-blocs.	Schéma-blocs organique d'un système. Élaboration, manipulation et réduction de schéma-blocs. Fonctions de transfert : – chaîne directe et chaîne de retour ; – boucle ouverte et boucle fermée.	S1
Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.	S3
Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.	S3

Commentaire

Les calculs intégraux des éléments d'inertie (matrice et centre d'inertie) ne donnent pas lieu à évaluation.

Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.	Liaisons : – liaisons parfaites ; – degrés de liberté ; – classe d'équivalence cinématique ; – géométrie des contacts entre deux solides ; – liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés ; – paramètres géométriques linéaires et angulaires ; – symboles normalisés. Graphe de liaisons. Schéma cinématique.	S1
Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.		
Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.	Vecteur position. Mouvements simple (translation et rotation) et composé. Trajectoire d'un point. Définition du vecteur vitesse et du vecteur taux de rotation. Définition du vecteur accélération. Composition des mouvements. Définition du contact ponctuel entre deux solides (roulement et glissement). Torseur cinématique (champ des vecteurs vitesse).	S2
Modéliser une action mécanique.	Modèle local (densités linéique, surfacique et volumique d'effort). Actions à distance et de contact. Modèle global. Passage d'un modèle local au modèle global. Frottements sec (lois de Coulomb) et visqueux. Torseur des actions mécaniques transmissibles. Torseur d'une action mécanique extérieure. Torseurs couple et glisseur.	S2
Simplifier un modèle de mécanisme.	Associations de liaisons en série et en parallèle. Liaisons équivalentes (approches cinématique et statique). Conditions et limites de la modélisation plane.	S2

Décrire le comportement d'un système séquentiel.	Diagramme d'états.	S2
<p><i>Commentaire</i> <i>La description graphique permet de s'affranchir d'un langage de programmation spécifique.</i></p>		

B3 – Valider un modèle

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.	Critères de performances.	S2
Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation et seuil) et retard pur.	S4
Modifier les paramètres et enrichir le modèle pour minimiser l'écart entre les résultats analytiques et/ou numériques et les résultats expérimentaux.		S4

C – Résoudre

C1 – Proposer une démarche de résolution

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.	Critères du cahier des charges : – stabilité (marges de stabilité, amortissement et dépassement relatif) ; – précision (erreur/écart statique et erreur de trainage) ; – rapidité (temps de réponse à 5 %, bande passante et retard de trainage).	S2
Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.	Compensation de pôles, réglage de marges, amortissement, rapidité et bande passante. Application aux correcteurs de type proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase.	S3

Choisir une démarche de résolution d'un problème d'ingénierie numérique ou d'intelligence artificielle. $\Leftarrow I$	Décomposition d'un problème complexe en sous problèmes simples. Choix des algorithmes (réseaux de neurones, k plus proches voisins et régression linéaire multiple).	S3
Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. $\Leftarrow I$	Fermetures géométriques.	S1
Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.	S3

C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Déterminer la réponse temporelle. $\Leftarrow I$	Expressions des solutions des équations différentielles pour les systèmes d'ordre 1 et 2 soumis à une entrée échelon. Allures des solutions des équations différentielles d'ordre 1 et 2 pour les entrées de type impulsion, échelon, rampe et sinus (en régime permanent).	S1
<p><i>Commentaire</i> La résolution d'équations différentielles et les transformées inverses de Laplace ne sont pas au programme.</p>		

Déterminer la réponse fréquentielle. $\Leftrightarrow I$	Allures des diagrammes réel et asymptotique de Bode.	S2
Déterminer les performances d'un système asservi.	<p>Stabilité d'un système asservi :</p> <ul style="list-style-type: none"> – définition ; – amortissement ; – position des pôles dans le plan complexe ; – marges de stabilité. <p>Rapidité d'un système :</p> <ul style="list-style-type: none"> – temps de réponse à 5 % ; – bande passante. <p>Précision d'un système asservi :</p> <ul style="list-style-type: none"> – théorème de la valeur finale ; – écart/erreur statique (consigne ou perturbation) ; – erreur de trainage vis-à-vis de la consigne ; – lien entre la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte et l'écart statique. 	S2
<p><i>Commentaire</i> <i>Les critères de Routh et de Nyquist ainsi que les diagrammes de Black-Nichols et de Nyquist, ne sont pas au programme.</i></p>		

Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.	Correcteurs proportionnel et proportionnel intégral.	S4
Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.	Trajectoire d'un point. Mouvements de translation et de rotation. Mouvement composé.	S1
Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. $\Leftrightarrow I$	Loi entrée-sortie géométrique. Loi entrée-sortie cinématique. Transmetteurs de puissance (vis-écrou, roue et vis sans fin, trains d'engrenages simples, pignon-crémaillère et poulies-courroie).	S2
<p><i>Commentaire</i> <i>Aucune connaissance spécifique aux trains d'engrenages épicycloïdaux n'est exigible.</i></p>		

Déterminer les actions mécaniques en statique.	Référentiel galiléen. Principe fondamental de la statique. Principe des actions réciproques.	S2
--	--	----

Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.	S3
Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.		

C3 – Mettre en œuvre une démarche de résolution numérique

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Mener une simulation numérique. $\simeq I$	Choix des grandeurs physiques. Choix du solveur et de ses paramètres (pas de discrétisation et durée de la simulation). Choix des paramètres de classification. Influence des paramètres du modèle sur les performances.	S2
Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations. $\simeq I$	Réécriture des équations d'un problème. Résolution de problèmes du type $f(x) = 0$ (méthodes de dichotomie et de Newton). Résolution d'un système linéaire du type $A \cdot X = B$. Résolution d'équations différentielles (schéma d'Euler explicite). Intégration et dérivation numérique (schémas arrière et avant).	S3
<p><i>Commentaires</i></p> <p>La « réécriture des équations » signifie :</p> <ul style="list-style-type: none"> – remettre en forme des équations pour leurs traitements par une bibliothèque ; – mettre sous forme matricielle un problème (problème de Cauchy et système linéaire). <p>Les méthodes numériques sont introduites au fur et à mesure, en fonction des besoins de la formation. Pour la résolution d'un système d'équations du type $A \cdot X = B$, l'utilisation d'une bibliothèque préimplémentée est privilégiée.</p> <p>Les aspects théoriques liés aux méthodes numériques ne sont pas exigibles (stabilité, convergence, conditionnement de matrices...).</p>		

Résoudre un problème en utilisant une solution d'intelligence artificielle. $\Leftrightarrow I$	Apprentissage supervisé. Choix des données d'apprentissage. Mise en œuvre des algorithmes (réseaux de neurones, k plus proches voisins et régression linéaire multiple). Phases d'apprentissage et d'inférence.	S3
<i>Commentaire</i> Des bibliothèques préimplémentées sont utilisées.		

D – Expérimenter

D1 – Mettre en œuvre un système

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Mettre en œuvre un système en suivant un protocole (*).		S2
Repérer les constituants réalisant les principales fonctions des chaînes fonctionnelles (*).	Fonctions acquérir, traiter et communiquer. Fonctions alimenter, moduler, convertir, transmettre et agir.	S2
Identifier les grandeurs physiques d'effort et de flux (*).		S2

D2 – Proposer et justifier un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir les configurations matérielles et logicielles du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation (*).		S2
Choisir les réglages du système en fonction de l'objectif visé par l'expérimentation (*).		
Choisir la grandeur physique à mesurer ou justifier son choix (*).		
Choisir les entrées à imposer et les sorties pour identifier un modèle de comportement (*).		

D3 – Mettre en œuvre un protocole expérimental

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Régler les paramètres de fonctionnement d'un système (*).		S2
Mettre en œuvre un appareil de mesure adapté à la caractéristique de la grandeur à mesurer (*).		
Effectuer des traitements à partir de données. $\Leftrightarrow I$	Traitement de fichiers de données. Moyenne et écart type.	S2
Identifier les erreurs de mesure (*).	Incertitudes, résolution, quantification, échantillonnage, justesse, fidélité, linéarité et sensibilité.	S2
Identifier les erreurs de méthode (*).		
<p><i>Commentaires</i> <i>L'incertitude renvoie à la technologie des appareils de mesure et des capteurs. Il n'est pas souhaité de longs développements théoriques et calculs associés.</i></p>		

E – Communiquer

E1 – Rechercher et traiter des informations

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Rechercher des informations (*).	Outils de recherche. Mots-clefs.	S2
Distinguer les différents types de documents et de données en fonction de leurs usages (*).		S2
Vérifier la pertinence des informations (obtention, véracité, fiabilité et précision de l'information) (*).		
Extraire les informations utiles d'un dossier technique (*).		
Lire et décoder un document technique.	Diagrammes SysML. Schéma cinématique.	S2
<p><i>Commentaire</i> <i>Les normes de représentation du langage SysML sont fournies.</i></p>		

Trier les informations selon des critères (*).		S2
Effectuer une synthèse des informations disponibles dans un dossier technique (*).		

E2 – Produire et échanger de l'information

Compétences développées	Connaissances associées	Semestre
Choisir un outil de communication adapté à l'interlocuteur (*).		S2
Faire preuve d'écoute et confronter des points de vue (*).		
Présenter les étapes de son travail (*).		
Présenter de manière argumentée une synthèse des résultats.		
Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.	Grandeurs utilisées : – unités du système international ; – homogénéité des grandeurs.	S2