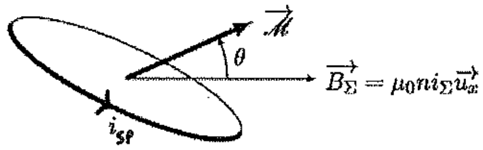
Exercice : dynamo

1. L'aimant, qui crée un champ magnétique permanent, est en mouvement dans la bobine. Le flux du champ magnétique de l'aimant $\overrightarrow{B_a}$ à travers la bobine est donc variable. Il se produit un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'un courant électrique au sein de la bobine. Il y a donc bien conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

La bobine crée donc un champ magnétique (proportionnel au courant induit qui circule dedans), qui va exercer une action mécanique sur l'aimant qui va s'opposer, d'après la loi de Lenz, à la cause qui lui a donné naissance, c'est-à-dire le mouvement de l'aimant. L'opérateur doit donc exercer une action mécanique supplémentaire pour maintenir la vitesse de rotation constante.

2. Immédiatement, on trouve $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t}$

3.



Flux du champ créé par la bobine à travers la spire :
$\varphi_{\Sigma\to\mathscr{S}} = \overrightarrow{B_\Sigma} \cdot \overrightarrow{S} = \mu_0 n i_\Sigma \overrightarrow{u_x} \cdot S\overrightarrow{n}$,
soit $\boxed{\varphi_{\Sigma\to\mathscr{S}} = \mu_0 n i_\Sigma \cos(\theta) S}$
On identifie le coefficient d'inductance mutuelle : $\boxed{M = \mu_0 n \cos(\theta) S}$

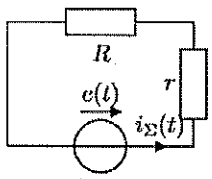
Ainsi on en déduit le flux du champ magnétique créé par la spire à travers la bobine :
$\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma} = M i_{SP} = \mu_0 n \cos(\theta) S i_{SP}$ soit $\boxed{\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma} = \mu_0 n \cos(\theta) \mathscr{M}}$

Fem induite dans le solénoïde due à la rotation de l'aimant $\boxed{e_{ext} = -\dfrac{d\varphi_{\mathscr{S}\to\Sigma}}{dt} = \mu_0 n \mathscr{M} \dot{\theta} \sin(\theta)}$, avec $\dot{\theta} = \omega_0$ et $\theta = \omega_0 t$

4. Le courant circulant dans la bobine dépend du temps, il se produit donc un phénomène d'auto-induction. Il faut donc également prendre en compte le flux propre $\varphi_P = L i_\Sigma$

Ainsi $\boxed{e = \mu_0 n \mathscr{M} \omega_0 \sin(\omega_0 t) - L\dfrac{di_\Sigma}{dt}}$

Circuit équivalent :



Loi des mailles : $e = (R+r)i_\Sigma$, soit $\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0 \sin(\theta) - L\dfrac{di_\Sigma}{dt} = (R+r)i_\Sigma$

Soit $\boxed{\dfrac{di_\Sigma}{dt} + \dfrac{R+r}{L} i_\Sigma = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0}{L} \sin(\omega_0 t)}$.

On peut poser $\tau = \dfrac{L}{R+r} \approx \dfrac{L}{R}$, avec $R \gg r$.

5. Le second membre est sinusoïdal, donc une fois le régime sinusoïdal établi $i_\Sigma(t) = I_\Sigma \sin(\omega_0 t + \Phi)$

On utilise la notation complexe (à la pulsation ω_0), : $j\omega_0 \underline{i_\Sigma} + \dfrac{\underline{i_\Sigma}}{\tau} = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0}{L} e^{j\omega_0 t}$

Soit $\underline{i_\Sigma} = \dfrac{\dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0 \tau}{L}}{1 + j\omega_0 \tau} e^{j\omega_0 t}$, avec $\dfrac{\tau}{L} = \dfrac{1}{R}$

Amplitude : $I_\Sigma = |\underline{i_\Sigma}| = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0}{R\sqrt{1 + (\omega_0 \tau)^2}}$

Phase à l'origine des temps : $\Phi = \arg\left(\dfrac{\dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0 \tau}{L}}{1 + j\omega_0 \tau}\right)$

Soit $\Phi = -\arctan(\omega_0 \tau)$

Ainsi en posant $\boxed{\alpha = \omega_0 \tau}$, on obtient bien la forme demandée : $\boxed{i_\Sigma(t) = \dfrac{\mu_0 n \mathscr{M} \omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan(\alpha))}$

6. Couple exercé sur l'aimant : $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B_\Sigma} = -\mathcal{M} B_\Sigma \sin(\theta)\vec{u_z}$

Soit $\boxed{\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_0 n \mathcal{M}^2 \omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\right) \sin(\omega_0 t)\vec{u_z}}$

L'aimant est soumis aux actions mécaniques :

— poids, donc le moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;

— action de la liaison pivot, que l'on va considérer comme parfaite, donc de moment nul par rapport à (Oz) ;

— action de l'opérateur $\vec{\Gamma_{op}}$

— action $\vec{\Gamma}$

Pour maintenir la vitesse de rotation constante, il est nécessaire que : $\vec{\Gamma_{op}} + \vec{\Gamma} = \vec{0}$

Ainsi $\langle \vec{\Gamma_{op}} \rangle = -\langle \vec{\Gamma} \rangle = \left\langle \frac{\mu_0 n \mathcal{M}^2 \omega_0}{R\sqrt{1+\alpha^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan(\alpha)\right) \sin(\omega_0 t) \right\rangle$

Avec $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$

Soit $\langle \vec{\Gamma_{op}} \rangle = \frac{\mu_0 n \mathcal{M}^2 \omega_0}{2R\sqrt{1+\alpha^2}} \langle \cos(-\arctan(\alpha)) - \cos(2\omega_0 t - \arctan(\alpha)) \rangle \vec{u_z}$

Ainsi $\langle \vec{\Gamma_{op}} \rangle = \frac{\mu_0 n \mathcal{M}^2 \omega_0}{2R\sqrt{1+\alpha^2}} \cos(\arctan(\alpha))\vec{u_z}$

Avec la formule fournie par l'énoncé, on trouve : $\boxed{\langle \vec{\Gamma_{op}} \rangle = \frac{\mu_0 n \mathcal{M}^2 \omega_0}{2R(1+\alpha^2)} \vec{u_z}}$

7. Équation électrique $\times i_\Sigma$: $R i_\Sigma^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L i_\Sigma^2\right) = \mu_0 n \mathcal{M} \omega_0 \sin(\omega_0 t) i_\Sigma$

Équation mécanique $\times \omega_0$: $\Gamma_{op} \times \omega_0 + \Gamma \times \omega_0 = 0$, soit $\Gamma_{op} \times \omega_0 - \mathcal{M}(\mu_0 n i_\Sigma)\sin(\theta) \times \omega_0 = 0$

On retrouve le fait que la puissance de l'action mécanique du champ magnétique $-\mathcal{M}(\mu_0 n i_\Sigma)\sin(\theta) \times \omega_0$ est l'opposée de la puissance de la fem extérieur $\mu_0 n \mathcal{M} \omega_0 \sin(\omega_0 t) i_\Sigma$: la conversion est donc parfaite.

Le bilan complet devient : $\Gamma_{op} \times \omega_0 - R i_\Sigma^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L i_\Sigma^2\right) = 0$

Soit $\boxed{\Gamma_{op} \times \omega_0 = R i_\Sigma^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L i_\Sigma^2\right)}$

La puissance mécanique fournie par l'opérateur extérieur est convertie en puissance électrique reçue par l'ampoule et en puissance stockée sous forme magnétique dans la bobine.

8. Une fois que l'opérateur cesse son opération, le seul moment non nul est l'action mécanique exercée par le champ magnétique créé par la bobine, qui d'après la loi de Lenz, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, c'est-à-dire le mouvement. La vitesse de rotation de l'aimant va alors diminuer au cours du temps jusqu'à s'annuler.