exercice 4 : le haut-parleur

1/ système : membrane de masse m

référentiel : terrestre supposé galiléen

bilan des forces extérieures : poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u_y}$

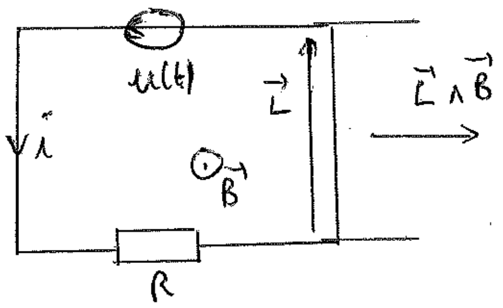
réaction $\vec{R} = +\|\vec{R}\|\vec{u_y}$

force de rappel du ressort : $\vec{F_r} = -kx\,\vec{u_x}$

force de Laplace : $\vec{F_L} = i\vec{L}\wedge\vec{B} = iaB\,\vec{u_x}$

force de frottement fluide : $\vec{F} = -\alpha\vec{V} = -\alpha v_x\vec{u_x}$

Vue de dessus

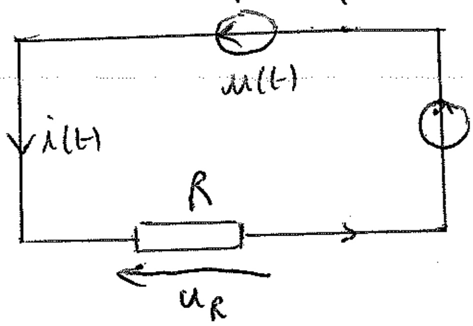


D'après la 2e loi de Newton : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F_r}+\vec{F_L}+\vec{F} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt}$

par projection sur $\vec{u_x}$: $0 + 0 - kx + iaB - \alpha v_x = m\dfrac{dv_x}{dt}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{aB}{m}i(t)} \quad (M)$$

2/ circuit électrique équivalent :



$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\Phi_P+\Phi_{ext})}{dt} = -\frac{d\Phi_P}{dt} - \frac{d\Phi_{ext}}{dt}$$

avec $-\dfrac{d\Phi_P}{dt} = -\dfrac{d(L\,i(t))}{dt} = -L\dfrac{di}{dt}$

et $-\dfrac{d\Phi_{ext}}{dt} = -aB\,v(t)$ comme dans les exercices 1 et 3.

la loi des mailles s'écrit : $u(t) + e(t) - u_R = 0$

$$\text{donc } u(t) - L\frac{di(t)}{dt} - Ba\,v(t) - R\,i(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Ba\,v(t) = u(t)} \qquad (E)$$

3. $$\begin{cases} (E)\times i : & R i^2 + L i \dfrac{di}{dt} + Ba\, v \cdot i = u \times i \\ (M)\times v : & m v \times \dfrac{dv}{dt} + \alpha v^2 + k x v = a B i \times v \end{cases}$$

on en déduit : $$u \times i = R i^2 + L i \frac{di}{dt} + \left(m v \frac{dv}{dt} + \alpha v^2 + k x v \right)$$

$$= R i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) + \alpha v^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} k x^2\right)$$

$u \times i = P_G$: puissance électrique apportée par le générateur

$R i^2 = P_J$: puissance dissipée par effet Joule

$-\alpha v^2 = (-\alpha \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ = puissance associée à la force de frottement

et $+\alpha v^2 = |\vec{F} \cdot \vec{v}|$ = puissance dissipée par les frottements donc cédée à l'air

d'où $$\boxed{P_{\substack{\text{électrique}\\ \text{apportée}}} = P_{\substack{\text{dissipée}\\ \text{(Joule)}}} + P_{\substack{\text{cédée à}\\ \text{l'air}}} + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{E_c} + \underbrace{\tfrac{1}{2} k x^2}_{E_P} + \underbrace{\tfrac{1}{2} L i^2}_{E_{magnétique}} \Big)}$$

4/ en régime sinusoïdal forcé, $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ et les solutions des équations (E) et (M) sont du type $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$

donc $\underline{i}(t) = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}\, e^{j\omega t}$ et $\underline{v}(t) = V_m e^{j\varphi_v} e^{j\omega t} = \underline{V}\, e^{j\omega t}$

sont solutions des équations complexes :

$$(\underline{E}) : \quad R\,\underline{i}(t) + L\frac{d\underline{i}(t)}{dt} + Ba\,\underline{v}(t) = \underline{u}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad R\underline{i} + j\omega L\underline{i} + Ba\,\underline{v} = \underline{u} \qquad (\underline{E}')$$

$$\text{et } (\underline{M}) : \quad \frac{d\underline{v}(t)}{dt} + \frac{\alpha}{m}\underline{v}(t) + \frac{k}{m}\int \underline{v}(t)\,dt = \frac{aB}{m}\underline{i}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad j\omega\underline{v} + \frac{\alpha}{m}\underline{v} + \frac{k}{m}\times\frac{1}{j\omega}\underline{v} = \frac{aB}{m}\underline{i} \qquad (\underline{M}')$$

$$(\underline{E}') \Leftrightarrow \quad \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + jL\omega + Ba \times \frac{\underline{v}}{\underline{i}}$$

$$\text{et } (\underline{M}') \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{\frac{aB}{m}}{\frac{\alpha}{m} + j\omega + \frac{k}{m}\times\frac{1}{j\omega}}$$

$$\text{d'où} \quad \underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{m}{a^2B^2}\times\left(\frac{\alpha}{m} + j\omega + \frac{k}{m}\times\frac{1}{j\omega}\right)}$$

du type $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Y}_{eq}$ avec $\underline{Y}_{eq} = \dfrac{1}{\frac{\alpha}{a^2B^2} + j\left(\frac{m}{a^2B^2}\right)\omega + \frac{k/a^2B^2}{j\omega}}$

du type : $\boxed{\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{1/jC_m\omega} + \frac{1}{jL_m\omega}}}$ avec $\begin{cases} R_m = a^2B^2/\alpha \\ C_m = m/a^2B^2 \\ L_m = a^2B^2/k \end{cases}$

$\underline{Z}$ est donc du type :

$$R + jL\omega + \frac{1}{\underline{Y}_{eq}}$$

avec $$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{1/jC_m\omega}} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}}$$

$\underline{Z}_{eq}$ est l'impédance de R_m, L_m et C_m en parallèle

<u>en conclusion :</u>

le haut parleur se comporte comme une impédance électrique $\underline{Z}_{elec} = R + jL\omega$ (d'une resistance et d'une bobine en série)

en série avec une impédance $\underline{Z}_{eq}$ dite motionnelle due au couplage électro-mécanique.