DS 1 - CORRECTION

Questions de cours et analyse dimensionnelle

1- Voir cours.
2- Voir cours.
3- Voir cours.
4- Voir cours.
5- ε_0 s'exprime en $A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$ donc $[\varepsilon_0] = [I]^2 \cdot T^4 \cdot M^{-1} \cdot L^{-3}$
Et $[I] = \left[\frac{dq}{dt}\right] = [q] \cdot T^{-1}$
D'où $\left[\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right] = \frac{[q]^2}{[I]^2 \cdot T^4 \cdot M^{-1} \cdot L^{-3} \times L^2} = \frac{[I]^2 \cdot T^2}{[I]^2 \cdot T^4 \cdot M^{-1} \cdot L^{-1}} = \frac{1}{T^2 \cdot M^{-1} \cdot L^{-1}} = \boxed{M \cdot L \cdot T^{-2}}$ ce qui est homogène à une force car $[F] = [m \times a] = M \cdot L \cdot T^{-2}$
6- $F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{(1{,}6\times10^{-19})^2}{(10^{-9})^2} \approx 10^{10} \times \frac{10^{-38}}{10^{-18}} \approx \boxed{10^{-10}\text{ N}}$

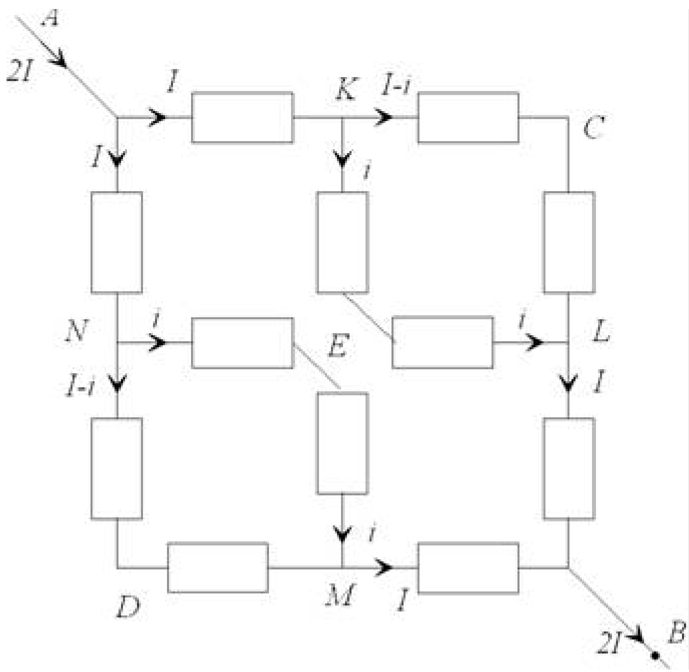
Exercice 1 : résistances équivalentes

Cas 1

Les 3 résistances R en derivation peuvent être remplacées par une seule de valeur $\frac{R}{3}$.

La résistances totale R_{AB} est donc $R + \frac{R}{3} = \boxed{\frac{4R}{3}}$(résistances en série).

Cas 2



Le circuit est symétrique par rapport à la diagonale (AB).

On peut en déduire que : $i_{KE} = i_{NE}$ et $i_{EL} = i_{EM}$

Or, d'après la loi des nœuds en *E* :

$$i_{KE} + i_{NE} = i_{EL} + i_{EM}$$
$$\Leftrightarrow 2i_{KE} = 2i_{EL}$$
$$\Leftrightarrow i_{KE} = i_{EL}$$

Et de même : $i_{NE} = i_{EM}$

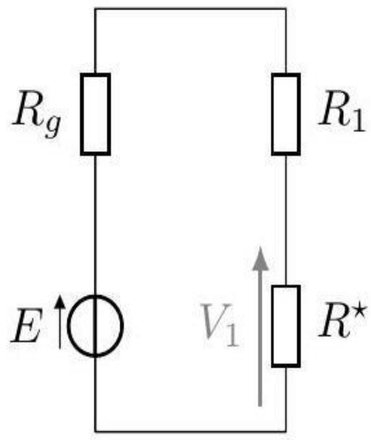
Tout se passe donc comme si les fils KEL et NEM étaient déconnectés en *E* (voir schéma).

On peut donc en déduire que "le carré inférieur gauche" est équivalent à 2 résistances de valeurs $2R$ en dérivation donc à R. La partie sous la diagonale (AB) est donc équivalente à une seule résistance de valeur $R + R + R = 3R$.

Et cette résistance $3R$ est elle-même en dérivation avec une autre résistance $3R$ (partie du circuit située au-dessus de (AB)) donc $\boxed{R_{AB} = \frac{3R}{2}}$

Exercice 2 : détermination d'une température à l'aide d'un montage potentiométrique

1- L'association en parallèle de R et R_d donne la résistance équivalente $R^\star$ et le circuit équivalent ci-contre.



Un pont diviseur de tension appliqué à $R^\star$ donne :

$$V_1 = \frac{R^\star}{R_1 + R_g + R^\star} E_{\square}$$

Or, $\frac{1}{R^\star} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_d}$ soit $R^\star = \frac{RR_d}{R+R_d}$ et on a donc :

$$\boxed{V_1 = E_{\square} \frac{\frac{RR_d}{R+R_d}}{R_1 + R_g + \frac{RR_d}{R+R_d}}}$$

2- Si le voltmètre est idéal, sa résistance peut être considérée comme infinie et le voltmètre peut être remplacé par un interrupteur ouvert donc $R^\star = R$

d'où, d'après le résultat de la question précédente : $\boxed{V_1 = \frac{R}{R_1+R_g+R} E_{\square}}$

3- Ici, on cherche à isoler R et on obtient ainsi : $V_1\left(R_1 + R_g + R\right) = RE_g$ soit $\boxed{R = \frac{V_1(R_g+R_1)}{E_{\square} - V_1}}$

L'application numérique donne : $\boxed{R = 200\ \Omega}$

La température a pour expression : $T = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R}{A} - 1\right)$ et l'application numérique donne $\boxed{T = 50°\mathrm{C}}$

4- La puissance échangée par la résistance avec le circuit est donnée par :

$$\mathcal{P}_R = V_1 \times I$$

où I est l'intensité circulant dans le circuit. D'après la loi d'Ohm, $V_1 = RI$. On en déduit donc :

$\mathcal{P}_R = \frac{V_1^2}{R}$ d'où, d'après l'expression qu'on vient d'obtenir : $\mathcal{P}_R = \frac{\left(\frac{R}{R_1 + R_g + R} E_{\square}\right)^2}{R} = \boxed{\frac{R}{\left(R_1 + R_g + R\right)^2} E_{\square}^2}$

5- On calcule la dérivée $\frac{d\mathcal{P}_R}{dR} = \frac{(r+R)^2 - 2R(r+R)}{(r+R)^4} \times E = \frac{(r+R) - 2R}{(r+R)^3} \times E$ (en posant $r = R_1 + R_g$)

Cette dérivée s'annule pour $R = \mathrm{r} = R_1 + R_g = 1{,}0\ \mathrm{k\Omega}$

On en déduit la température T correspondante :

$$T = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R}{A} - 1\right) = \frac{1}{2 \times 10^{-2}} \times \left(\frac{1000}{100} - 1\right) = \frac{9}{2} \times 10^2 = \boxed{450°\mathrm{C}}$$

Exercice 3 : étude de circuits à plusieurs mailles

1- On associe de proche en proche les résistances.

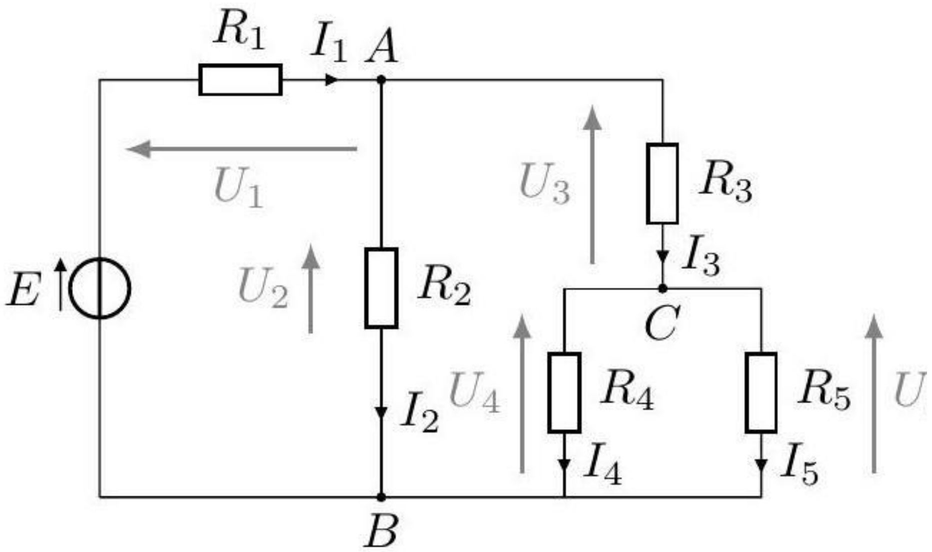
- R_4 et R_5 sont en parallèle et donnent donc lieu à une résistance équivalente R_{eq_1} donnée par :

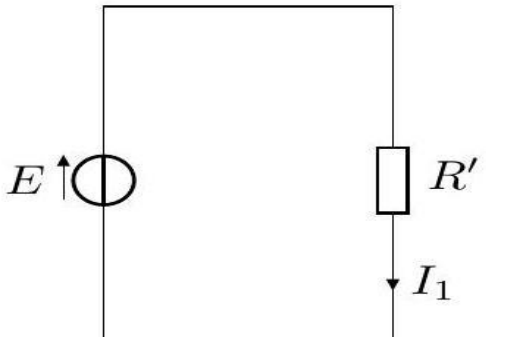
$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}_1}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{2}{R} \text{ soit } R_{\mathrm{eq}_1} = \frac{R}{2}$$

- R_{eq_1} est en série avec R_3 donc : $R_{\mathrm{eq}_2} = R_{\mathrm{eq}_1} + R_3 = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$
- R_{eq_2} est en parallèle avec R_2 donc : $\frac{1}{R_{\mathrm{eq}_3}} = \frac{1}{R_{\mathrm{eq}_2}} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{3R} + \frac{1}{R} = \frac{5}{3R}$ soit $R_{\mathrm{eq}_3} = \frac{3R}{5}$

- Enfin, R_{eq_3} et R_1 sont en série, on en déduit donc la résistance équivalente suivante :

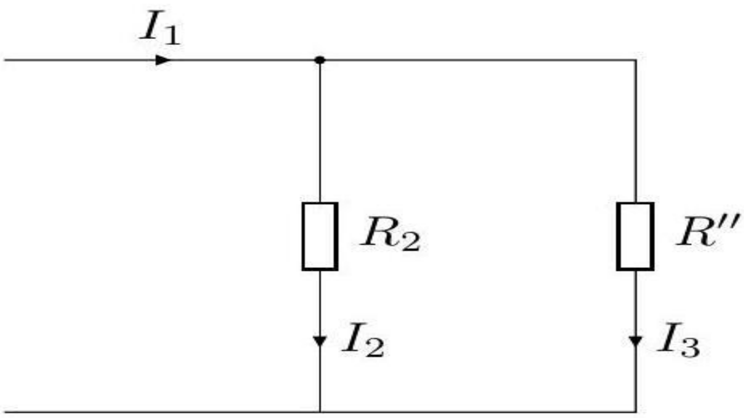
$$R' = R_{\text{eq}_3} + R = \frac{3R}{5} + R \text{ soit } \boxed{R' = \frac{8R}{5}}$$





D'après le schéma ci-contre, l'application de la loi d'Ohm à R' donne :

$$E = R'I_1 \text{ soit } \boxed{I_1 = \frac{E}{R'} = \frac{5E}{8R}}$$



2- En reprenant les associations précédentes on se ramène au circuit ci-contre avec :

$$R'' = R_{\text{eq}_2} = \frac{3R}{2}$$

La formule du pont diviseur de courant permet alors d'écrire :

$$I_2 = I_1 \frac{R''}{R'' + R_2} \text{ soit } I_2 = \frac{5E}{8R} \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{3R}{2} + R} = \frac{5E}{8} \frac{3}{5R} = \boxed{\frac{3E}{8R}}$$

3- Les lois des nœuds aux nœuds au points A et B donnent :

- En A : $I_1 = I_2 + I_3$
- En B : $I_2 + I_4 + I_5 = I_1$

La loi des mailles à gauche donne : $E = U_1 + U_2$
À droite, on obtient : $U_2 = U_3 + U_4$ et $U_4 = U_5$.

Les lois d'Ohm des différentes résistances permettent de modifier ces lois des mailles, on obtient ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 + I_4 + I_5 = I_1 \\ E = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ R_2 I_2 = R_3 I_3 + R_4 I_4 \\ R_4 I_4 = R_5 I_5 \end{cases}}$$

4- Si toutes les résistances sont égales à R, le système devient :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 & (1) \\ I_2 + I_4 + I_5 = I_1 & (2) \\ E = RI_1 + RI_2 \text{ soit } E = R(I_1 + I_2) & (3) \\ RI_2 = RI_3 + RI_4 \text{ soit } I_2 = I_3 + I_4 & (4) \\ RI_4 = RI_5 \text{ soit } I_4 = I_5 & (5) \end{cases}$$

Ainsi, d'après (5), (2) devient : $I_2 + 2I_4 = I_1$, d'après (4), $I_4 = I_2 - I_3$ donc :

$$I_2 + 2(I_2 - I_3) = I_1 \text{ soit } 3I_2 - 2I_3 = I_1$$

Ensuite, d'après (1), $I_3 = I_1 - I_2$ donc : $3I_2 - 2(I_1 - I_2) = I_1$ soit $5I_2 = 3I_1$

En injectant cette équation dans (3), on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} I_1 = \dfrac{5E}{8R} \\ I_2 = \dfrac{3E}{8R} \end{cases}}$$

On retrouve les expressions obtenues aux questions 1 et 2.

5- En utilisant la résistance $R' = \frac{8R}{5}$ équivalente à l'ensemble des résistances, on peut écrire la loi d'Ohm pour R' :

$$U = R'I = \boxed{\frac{8}{5}RI}$$

Et, d'après le pont diviseur de courant : $I_2 = \frac{R''}{R_2 + R''}I = \frac{\frac{3}{2}R}{R + \frac{3}{2}R}I = \boxed{\frac{3}{5}I}$

Exercice 4 : conductances itératives

1- Par analogie avec les associations de résistances :

- la conductance équivalente à 2 résistances en dérivation de conductances G_1 et G_2 est $G_1 + G_2$
- et la conductance équivalente à 2 résistances en série est : $\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}$

La conductance équivalente à G_2 et G_0 est donc : $G_0 + G_2$

La conductance équivalente à G_1, G_2 et G_0 est donc : $\frac{G_1(G_0+G_2)}{G_1+G_0+G_2}$

Et la conductance équivalente à l'ensemble est :

$$\boxed{G_{e_1} = G_2 + \frac{G_1(G_0 + G_2)}{G_0 + G_1 + G_2}}$$

Par définition de la conductance itérative, il vient :

$$G_{0_i} = G_2 + \frac{G_1\left(G_{0_i} + G_2\right)}{G_{0_i} + G_1 + G_2}$$

D'où, après inversion de la relation précédente :

$$\boxed{G_{0_i} = \sqrt{G_2(2G_1 + G_2)}}$$

2- Comme G_{0i} est branchée à la sortie de (1) : $G_{A_1A_1'} = G_{0i}$

Et de même : $G_{A_2A_2'} = G_{0i}$

Et, de proche en proche, on en déduit : $\boxed{G_{A_nA'_n} = G_{e_u} = G_{0i}}$

3- Comme le quadripôle est chargé par sa conductance itérative, on peut écrire :

$$i_0 = G_{0_i} u_0 \quad \text{et} \quad i_1 = G_{0_i} u_1$$

Il en résulte que : $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1} = \frac{u_0}{u_1} = A_{u_1}$

En considérant que le quadripôle réalise un diviseur de tension, $u_0 = \frac{G_1}{G_1 + \left(G_{0_i} + G_2\right)} u_1$.

L'amplification en tension et l 'amplification en courant s'en déduisent immédiatement :

$$\begin{aligned} A_{i_1} = A_{u_1} \quad &= \frac{G_1}{G_{0_i} + G_1 + G_2} \\ &= \frac{G_1}{\sqrt{G_2(2G_1 + G_2)} + G_1 + G_2} \\ &= \boxed{\frac{1}{1 + k + \sqrt{k(2+k)}}} \end{aligned}$$

4- Pour établir les expressions de A_{u_n}, il suffit de remarquer, d'une part, que :

$$A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{u_0}{u_1} \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et, d'autre part que, tous les quadripôles de l'association ont la même amplification en tension, parce qu'ils sont tous chargés par la conductance itérative. En conséquence :

$$\boxed{A_{u_n} = \left(A_{u_1}\right)^n}$$

Pour l'amplification en courant, on aboutit à un résultat analogue : $\boxed{A_{i_n} = \left(A_{i_1}\right)^n}$

Exercice 5 : chimie

1-

$$\begin{aligned} Q_r \quad &= \frac{\mathrm{a}(\mathrm{Ag}\ (S_2O_3)_2^{3-}) \times \mathrm{a}(B_\mathrm{r}{}^-)}{\mathrm{a}(\mathrm{AgBr}) \times \mathrm{a}(S_2O_3^{2-})^2} \\ &= \frac{[\mathrm{Ag}\ (S_2O_3)_2^{3-}] \times [B_\mathrm{r}{}^-]}{1 \times [S_2O_3^{2-}]^2} \end{aligned}$$

2- Comme on place la même quantité de chacune des espèces dans le même volume V, les concentrations initiales de toutes les espèces sont égales (concentrations notées c).

Donc $Q_{\mathrm{r,ini}} = \frac{c \times c}{1 \times c^2} = 1 < k = 4$

et la <u>réaction évolue par conséquent spontanément dans le sens direct</u>.

3- Dans l'état final : $n_f(\mathrm{Ag}Br) = n_{\mathrm{ini}}\left(A_g Br\right) - \xi_f$

Donc si AgBr est entièrement consommé : $\xi_f = \xi_{\max} = n_{\mathrm{ini}}\left(A_g Br\right)$

d'où : $\xi_{\max} = \frac{m(\mathrm{Ag}B_n)}{M(\mathrm{Ag}B_n)} = \frac{2000 \times 0{,}100}{2{,}0 \times 10^2} = \boxed{1{,}0\ \mathrm{mol}}$

4-

$$\begin{aligned}
K &= \frac{[\mathrm{Ag}\,(S_2O_3)_2^{3-}] \times [B_\mathrm{r}{}^-]}{1 \times [S_2O_3^{2-}]^2} \\
&= \frac{\dfrac{n_\text{eq}\,(\mathrm{Ag}(S_2O_3)_2^{3-})}{V} \times \dfrac{n_\text{eq}\,(B_\mathrm{r}{}^-)}{V}}{\left(\dfrac{n_\text{eq}\,(S_2O_3^{2-})}{V}\right)^2} \\
&= \frac{n_\text{eq}\,(\mathrm{Ag}(S_2O_3)_2^{3-}) \times n_\text{eq}\,(B_\mathrm{r}{}^-)}{n_\text{eq}\,(S_2O_3^{2-})^2} \\
&= \frac{\xi_{eq}^2}{(n_0' - \xi_{eq})^2}
\end{aligned}$$

5- Pour faire réagir tout $AgBr$, l'avancement ξ_eq doit atteindre ξ_max

Donc $K = \frac{\xi_\text{max}^2}{(n_0' - \xi_\text{max})^2} \Leftrightarrow \pm\sqrt{K} = \frac{\xi_\text{max}}{n_0' - \xi_\text{max}}$ ($-\sqrt{K}$ est impossible car $\xi_\text{max} > 0$ et $n_0' - \xi_\text{max} > 0$)

D'où, après inversion :

$$\boxed{n_0' = 2\xi_\text{eq} + \frac{\xi_\text{eq}}{\sqrt{K}} = 2{,}0 + \frac{1{,}0}{2} = 2{,}5 \text{ mol}}$$

6- Si on pèse 10 fois moins de $S_2O_3^{2-}$: $n_\text{ini}\,(S_2O_3^{2-}) = n_0'' = \frac{n_0'}{10} = 0{,}25 \text{ mol}$

Et, après inversion de la relation $\sqrt{K} = \frac{\xi_\text{eq}}{n_0'' - \xi_{eq}}$ on trouve : $\xi_{eq} = \frac{\sqrt{K} n_0''}{1+2\sqrt{K}} = \frac{2\times 0{,}25}{1+2\times 2} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1 \text{ mol}$

<u>Il reste donc du AgBr</u> car $\xi_{eq} < \xi_{max}$

Et $\boxed{n_f(\mathrm{AgBr}) = n_\text{ini}\,(\mathrm{Ag}Br) - \xi_{eq} = 1{,}0 - 0{,}1 = 0{,}9 \text{ mol}}$