Physique et chimie – 4h

DS avec calculatrice

Quelques recommandations de type concours

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend **10 pages** numérotées 1/10, 2/10, … 10/10.
- Les candidats sont invités à porter une attention toute particulière à la **rédaction** : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Les candidats devront toujours établir une **expression littérale** avant d'effectuer toute application numérique (pas de calcul numérique intermédiaire).
- Les réponses **non justifiées** ne seront pas prises en compte.
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'**homogénéité** ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'**unité** ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Tous les résultats doivent être **encadrés**.
- Les pages de votre copie doivent être numérotées ; par exemple, pour 4 pages rendues (une copie double) : 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
- Si un candidat repère ce qui semble être une **imprécision de l'énoncé**, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutefois, si un candidat repère ce qui semble être une **erreur d'énoncé** (relation fausse, valeur numérique manquante...), il peut dans ce cas se lever et interroger le professeur surveillant.

Questions de cours ≈ 7 points

CHIMIE

1. Soit la réaction, supposée totale : $\alpha_1\ R_1 \rightleftarrows \alpha_1'\ P_1 + \alpha_2'\ P_2 + \ldots$

En supposant la réaction d'ordre 0 par rapport au réactif R_1, déterminer l'expression du temps de demi-réaction en fonction entre autres de la concentration initiale C_0 en réactif R_1 et de la constante cinétique k (on rappellera pour cela la définition du temps de $t_{1/2}$ mais on pourra admettre l'expression de $[R_1](t)$).

OPTIQUE

2. Soient un faisceau incident délimité par deux rayons quelconques (ne passant par aucun point particulier) parallèles entre eux et passant par les bords d'une lentille divergente. Construire le faisceau émergent correspondant.

ELECTRICITE

3. Déterminer la dimension du produit LC, L étant une inductance et C une capacité. Justifier.

MECANIQUE

4. Déterminer la longueur à l'équilibre d'un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k auquel on a accroché une masse m. Détailler la rédaction.

Exercice 1 : chimie ≈ 17 points

A- Le calcium dans le squelette

Le squelette d'un homme adulte a une masse moyenne $m = 12{,}0\ \mathrm{kg}$. Les os sont constitués par de l'eau (50% en masse), des composés organiques (25% en masse) et des composés minéraux (25% en masse). En première approximation, on peut admettre que le phosphate de calcium $\mathrm{Ca_3(PO_4)_2}$ est l'unique composé minéral présent dans les os.

On donne les masses molaires atomiques en g. mol^{-1} :

$$M(\mathrm{Ca}) = 40\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}} \quad ; \quad M(\mathrm{P}) = 31\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}} \quad ; \quad M(\mathrm{O}) = 16\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$$

1. En négligeant toute présence de calcium hors des os, estimer la masse m_{Ca} totale de calcium présente chez un adulte.

2. Bien que présentant un aspect fortement minéral, les os sont des tissus vivants. Le calcium du squelette est en renouvellement permanent, 20% de la masse totale de calcium se trouvant remplacée en environ une année.

Sachant qu'un litre de lait apporte 1110 mg de calcium, estimer quel volume de lait devrait boire un adulte quotidiennement s'il voulait couvrir complètement, avec ce seul aliment, ses besoins en calcium ?

B- Expériences

On s'intéresse à la vitesse de la réaction de dissolution du carbonate de calcium selon deux méthodes.

Pour cela on étudie l'évolution de la réaction entre le carbonate de calcium $\mathrm{CaCO_{3(\,s)}}$ et un volume $V_0 = 100\ \mathrm{mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 0{,}10\ \mathrm{mol.L^{-1}}$.

L'équation de la réaction s'écrit :

$$\mathrm{CaCO_{3(\,s)} + 2H^+_{(aq)} = CO_{2(\,g)} + H_2O_{(l)} + Ca^{2+}_{(qq)}}$$

On considérera que la totalité du dioxyde de carbone formé se dégage.

Méthode 1

Dans une première expérience on mesure la pression du dioxyde de carbone apparu en utilisant un capteur de pression différentiel. Le gaz occupe un volume $V = 1{,}0\ \mathrm{L}$ à la température de $25^\circ\mathrm{C}$. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

$\mathrm{t(s)}$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$p_{\mathrm{CO_2}}(\ \mathrm{Pa})$	1250	2280	3320	4120	4880	5560	6090	6540	6940	7170

3. Établir la relation entre l'avancement x et $p_{\mathrm{CO_2}}$. Effectuer l'application numérique à $t = 100\ s$ afin de déterminer la valeur manquante du tableau de valeurs suivant (ne pas rendre le tableau).

Donnée numérique : $\mathrm{R} \approx 8{,}31\ \mathrm{J \cdot\ K^{-1} \cdot\ \ mol^{-1}}$

$\mathrm{t(s)}$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
x (mmol)	0,50	0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	

Méthode 2

Dans une deuxième expérience on mesure le pH de la solution afin de déterminer la concentration $[\mathrm{H^+}]$ en fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau page suivante :

$\mathrm{t(s)}$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$n_{\mathrm{H^+}}(\mathrm{mmol})$	9,00	8,20	7,30	6,70	6,10	5,50	5,10	4,70	4,40	4,20

4. Établir la relation entre $n_{\mathrm{H^+}}$et l'avancement x. Effectuer l'application numérique à $t = 10{,}0\ s$ afin de compléter le tableau de valeurs suivant :

$\mathrm{t(s)}$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
x (mmol)		0,90	1,35	1,65	1,95	2,25	2,45	2,65	2,80	2,90

Au vu des tableaux de mesures, les deux méthodes sont bien cohérentes et on utilisera donc par la suite indifféremment l'un ou l'autre des tableaux donnant les valeurs de *x*.

C- Cinétique

Une fois les résultats expérimentaux obtenus on désire déterminer l'ordre de la réaction par rapport à l'ion oxonium $\mathrm{H^+}$. On utilisera comme expression de la vitesse :

$$v = k\left[\mathrm{H^+_{(aq)}}\right]^{\alpha}$$

où α est l'ordre de la réaction.

5. Établir la relation entre $\left[\mathrm{H^+_{(aq)}}\right]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 0 par rapport à $\mathrm{H^+_{(aq)}}$. En déduire la relation suivante :

$$x = kV_0 t$$

6. Établir la relation entre $\left[\mathrm{H^+_{(aq)}}\right]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 1 par rapport à $\mathrm{H^+_{(aq)}}$. En déduire la relation suivante :

$$\ln\left(\frac{c_a V_0 - 2x}{c_a V_0}\right) = \mathrm{f}(t)$$

7. Établir la relation entre $\left[\mathrm{H^+_{(aq)}}\right]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 2 par rapport à $\mathrm{H^+_{(aq)}}$. En déduire la relation suivante :

$$\frac{1}{c_a V_0 - 2x} - \frac{1}{c_a V_0} = \frac{2kt}{V_0}$$

On obtient les graphiques proposés en annexe.

8. Déterminer le graphe à tracer afin de pouvoir effectuer une régression linéaire à l'ordre 2. Réaliser cette régression linéaire et donner les caractéristiques de celle-ci. Tracer l'allure de ce graphe en annexe page 7.

9. À l'aide des graphiques de l'annexe et de celui de la question 8, déterminer l'ordre de la réaction et la constante cinétique dont on précisera l'unité.

10. Le carbonate de calcium $\mathrm{CaCO_3}$ est le composé majeur des roches calcaires comme la craie mais également du marbre. C'est le constituant principal des coquilles d'animaux marins, du corail et des escargots. Il est très peu soluble dans l'eau pure mais beaucoup plus soluble dans une eau acide chargée en dioxyde de carbone.

Que pensez-vous quant à la vitesse de dissolution des coraux dans l'océan, en supposant que le pH de l'océan fluctue entre 8,0 et 8,3 ? Répondre de manière « semi-quantitative ».

Exercice 2 : circuit électrique du premier ordre (exercice plus difficile) ≈ 16 points

On considère le montage de la figure 1 comportant un générateur idéal de tension constante E_0, un résistor de résistance R, un condensateur de capacité C initialement déchargé et un dipôle $\mathcal{D}$ assimilé à un résistor de résistance $R_L = \alpha R$.

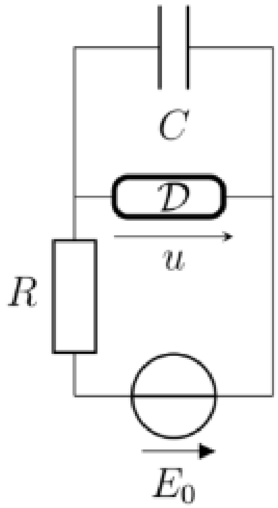


Figure 1

A- Une première équation d'évolution

1. Déterminer l'expression de u en régime permanent (notée u_∞) en fonction de α et E_0.

Dans un tel circuit linéaire, l'équation d'évolution de $u(t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont la solution comporte d'une part une solution de l'équation homogène $u_H(t)$ et d'autre part une solution particulière constante $u_P(t)$.

2. Laquelle de ces deux solutions correspond au régime transitoire ? La constante de temps τ_α caractérisant cette solution étant indépendante de E_0, en déduire un schéma simplifié puis l'expression de cette constante de temps τ_α qu'on explicitera en fonction de $\tau_0 = RC$ et de α.

Remarque : il est possible de poursuivre sans l'expression de τ_α.

B- Un dipôle à deux états

En réalité, le dipôle $\mathcal{D}$ est une lampe contenant un gaz raréfié qui peut être dans deux états électriques (lampe éteinte ou allumée). Ces deux états correspondent chacun à une valeur de α.

Le comportement électrique de $\mathcal{D}$ diffère selon son état : c'est un assez bon conducteur si elle est allumée, et un assez bon isolant si elle est éteinte.

3. Que peut-on dire a priori (et qualitativement) de α si la lampe est éteinte ? si elle est allumée ?

On réalise le circuit avec $R = 20\ \mathrm{k\Omega}$ et $C = 200\ \mu\ \mathrm{F}$. Lors du branchement initial du circuit, on admettra que la lampe est éteinte et le condensateur déchargé. Par la suite :

- la lampe reste éteinte tant que la tension à ses bornes vérifie $|u| < U_a$ où $U_a = 90\ \mathrm{V}$ est la tension d'allumage ; dans ce cas elle a pour résistance $R_L = R_e \gg R$;
- une fois allumée, la lampe a pour résistance $R_L = R_a \simeq 1\mathrm{k\Omega}$; elle reste allumée sauf si la tension à ses bornes diminue trop et elle va donc s'éteindre dès lors que $|u| < U_e$ où $U_e = 70\ \mathrm{V}$ est la tension d'extinction.

4. Exprimer puis calculer la constante de temps $\tau_\alpha = \frac{\alpha RC}{1+\alpha}$ dans les deux régimes, successivement lampe éteinte puis allumée.

5. Exprimer la limite $\lim_{t\to\infty} u(t)$ si la lampe ne s'allume jamais ; puis si elle reste allumée. En déduire que le système oscille seulement si $E_0 > 0$ est compris dans un intervalle que l'on déterminera.

Est-ce le cas avec $E_0 = 120$ V, valeur choisie dans la suite ?

C- Étude numérique du régime d'oscillation

On propose une étude numérique des oscillations au moyen d'un algorithme dérivé de la méthode d'Euler explicite pour l'étude de $u(t)$.

6. Justifier par des calculs la ligne 21 du programme 1 de l'annexe (à rendre avec la copie).

7. Compléter sans justification les lignes 22 et 26 puis, sur le graphe obtenu et tracé en annexe (à rendre avec la copie), identifier les phases où la lampe est allumée et celles où elle est éteinte.

8. Le programme 2 est une version modifiée du programme 1 (seule la boucle while a été reproduite). Compléter sans justification la ligne 20 du programme 2 (les instructions if qui suivent étant les mêmes que dans le programme 1).

9. Sur la figure 2, quelle est la valeur de a ? Justifier.

La valeur de b est égale à $b \simeq 47\ \mathrm{V}$ mais elle se rapproche de la valeur attendue (à expliciter) lorsqu'on diminue le pas *dt* de la méthode d'Euler. Proposer une explication.

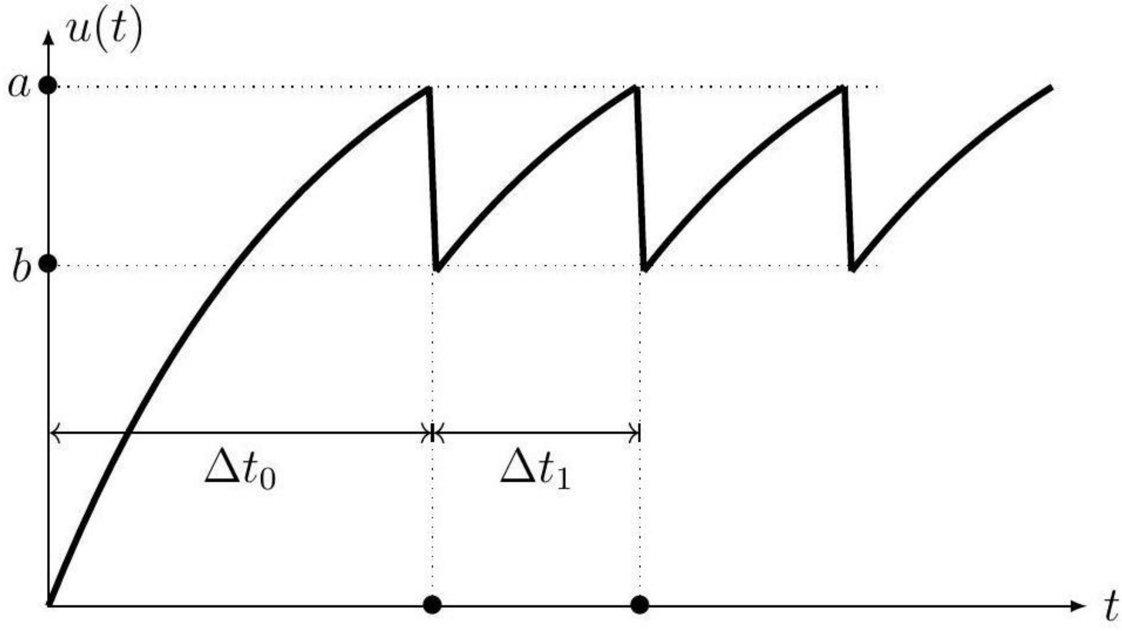
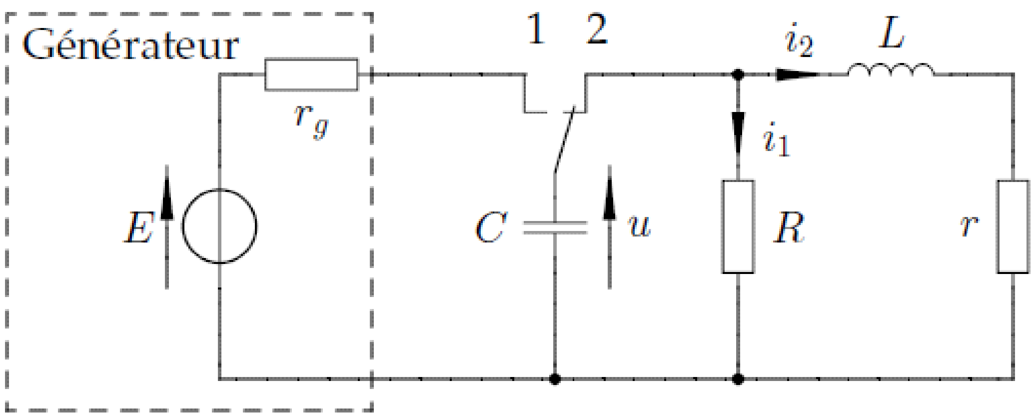


Figure 2 - Tracé de $u(t)$ par la méthode numérique proposée

10. La lampe va clignoter. Ces oscillations seront-elles observables à l'œil dont le temps de réponse est de l'ordre de 0,1 s ? Justifier qualitativement.

Exercice 3 : oscillateur électriq ≈ 16 points



On donne E = 10 V ; r_g = 50 Ω ; R = 1,0 kΩ ; C = 1,0 µF ; L = 0,10 H ; r = 10 Ω.

On étudie le circuit représenté en page précédente comportant :

- un interrupteur à bascule ;
- un générateur de tension réel, modélisé par son équivalent Thévenin de force électromotrice E et de résistance interne r_g ;
- un condensateur parfait de capacité C ;
- monté en parallèle avec un résistor de résistance R ;
- une bobine réelle modélisée par une inductance L en série avec un résistor de résistance r.

A- Etat initial

1. L'interrupteur est en position 2 depuis longtemps. Justifier par une phrase la valeur de la tension u.

B- Interrupteur en position 1

À $t = t_1 = -1$ s, on bascule l'interrupteur en position 1.

2. Établir l'équation différentielle qui régit alors la tension u aux bornes du condensateur :

3. Représenter l'allure de u en fonction du temps en faisant apparaitre la tangente à l'origine et des valeurs numériques sur les axes.

4. Quelle est la valeur U_0 de u au bout d'une seconde, c'est-à-dire pour $t = 0$?

C- Interrupteur position 2

À $t = 0$ s, on bascule l'interrupteur en position 2.

5. Déterminer, en fonction des données et de U_0, les valeurs de u, i_1 et i_2 à $t = 0^+$, juste après la bascule de l'interrupteur en 2 puis au bout d'un temps infini.

Les réponses seront présentées <u>dans un tableau</u> (sans justifications). (0 si pas de tableau)

6. Établir la nouvelle équation différentielle qui régit la tension u aux bornes du condensateur et calculer la constante de temps caractéristique de cette équation.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right)u = 0$$

7. Mettre l'équation précédente sous la forme canonique (faisant intervenir Q et ω_0).

Préciser le nom, l'expression en fonction des données et la valeur des constantes Q et ω_0.

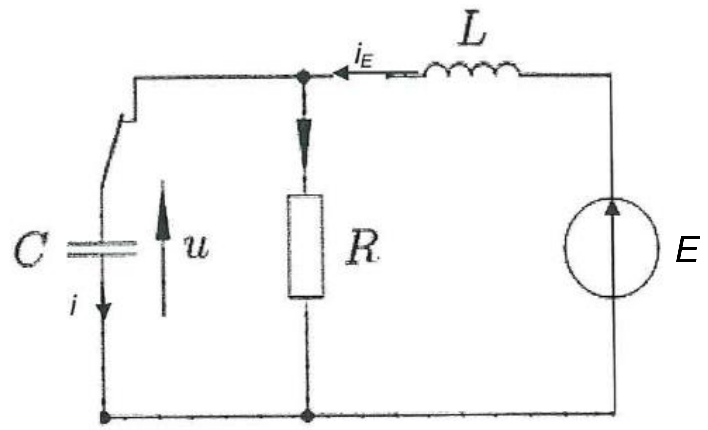
À quel type de régime a-t-on affaire ? Justifier.

8. Tracer l'allure de $u(t)$ en respectant entre autres les valeurs initiales et finales ainsi que le nombre d'oscillations visibles.

D- Détermination expérimentale des valeurs de *R*, *L* et *C*

On considère la portion de droite du circuit précédent, la bobine étant cette fois-ci supposée idéale et on place un générateur de tension en série avec la bobine (voir circuit ci-dessous). Afin de déterminer expérimentalement les valeurs de R, L et C, on réalise les deux expériences suivantes :

- <u>Expérience 1</u> : le générateur de tension fournit une tension constante E = 5,3 V et après un temps suffisamment long, on mesure l'intensité i_E. On mesure i_E = 0,54 mA.



• <u>Expérience 2</u> : on soumet le circuit à un échelon de tension variant entre 0V et *E'* (≠ *E*). Les tracés du portrait de phase du condensateur et de la tension *u*(*t*) aux bornes du condensateur sont présentés ci-dessous.

<u>Informations utiles pour la suite</u> :

Dans le cas du circuit proposé ci-dessus, on peut prouver (et on admettra) que $\mathrm{Q} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$

Le décrément logarithmique d'un signal sinusoïdal amorti est par définition égal au logarithme du rapport de deux amplitudes successives. Avec les notations du schéma de la page 3 :

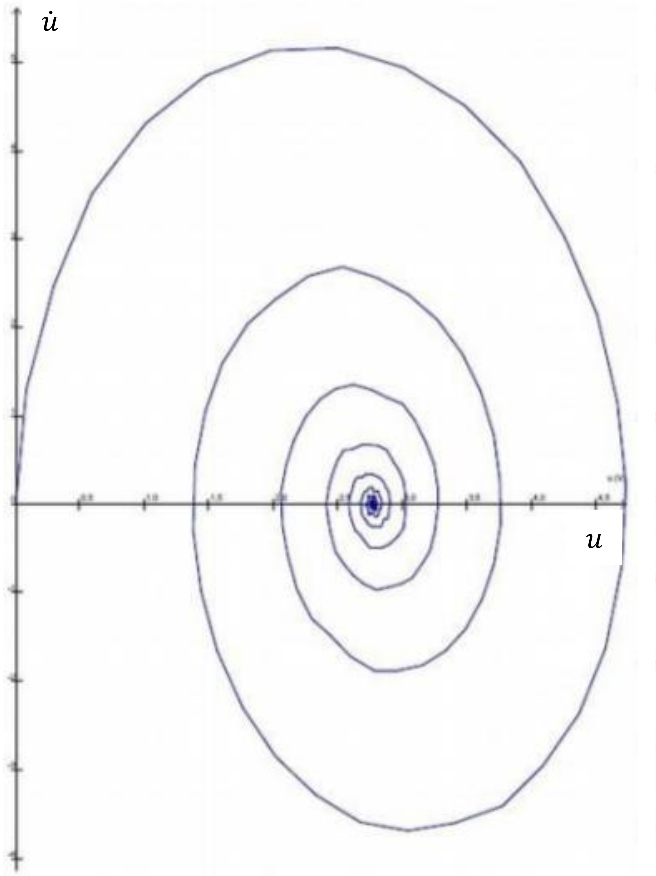
$$\delta = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

Et on peut prouver que : $\delta \approx \pi/\mathrm{Q}$

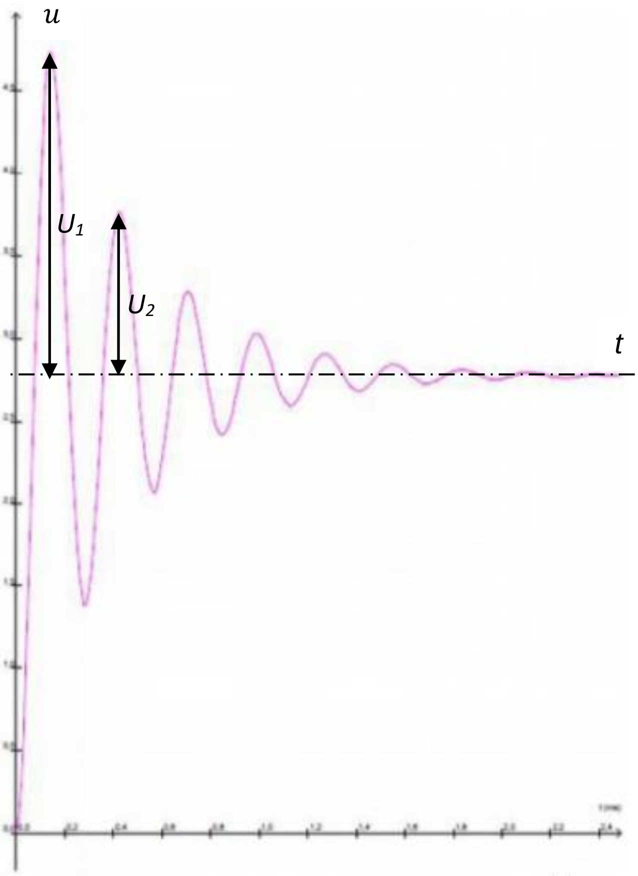
9. Déterminer au moyen des graphiques la valeur de *E'*, la pseudo-période *T* du signal, ainsi que le décrément logarithmique *δ* défini ci-dessous.

10. En déduire le facteur de qualité *Q* puis la pulsation propre ω_0.

11. Déterminer, en justifiant les expressions utilisées, les valeurs de *R*, *L* et *C* (calculs numériques intermédiaires autorisés).

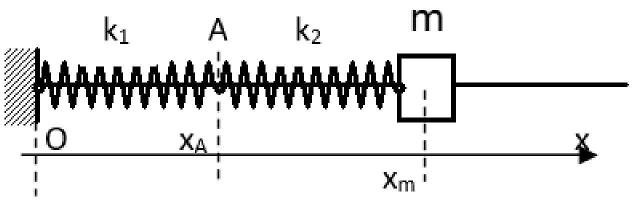


Portrait de phase du condensateur : $\dot{u} = f(u)$
Echelle : abscisse 0,5 V/div ; ordonnée 1 mA/div.



Evolution temporelle de *u*.
Echelle : abscisse 0,2 ms/div ; ordonnée 0,5 V/div.

Exercice 4 : oscillateur mécanique ≈ 8 points



Soient deux ressorts de constantes de raideur k_1 et k_2 et de même longueur à vide L_0 accrochés ensemble en un point appelé A de masse m_A.

La position du point A est repérée par son abscisse x_A sur un axe horizontal (Ox), voir figure.

La position de la masse m attachée à l'extrémité des deux ressorts accrochés est repérée par l'abscisse x_m .

On considère (dans un premier temps) que le point A a une masse m_A.

1. Après avoir donné les expressions des forces exercées par le ressort de raideur k_1 sur A et du ressort de raideur k_2 sur A en fonction de x_A, x_m (etc.), en déduire l'équation différentielle vérifiée par x_A.

2. En déduire une relation entre x_A et x_m en considérant finalement que le point A est juste le point d'accroche entre les deux ressorts et qu'il a donc une masse nulle.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x_m(t)$ puis modifier celle-ci en éliminant la variable x_A à l'aide de la relation précédente.

$$m\ddot{x}_m + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_m = c$$

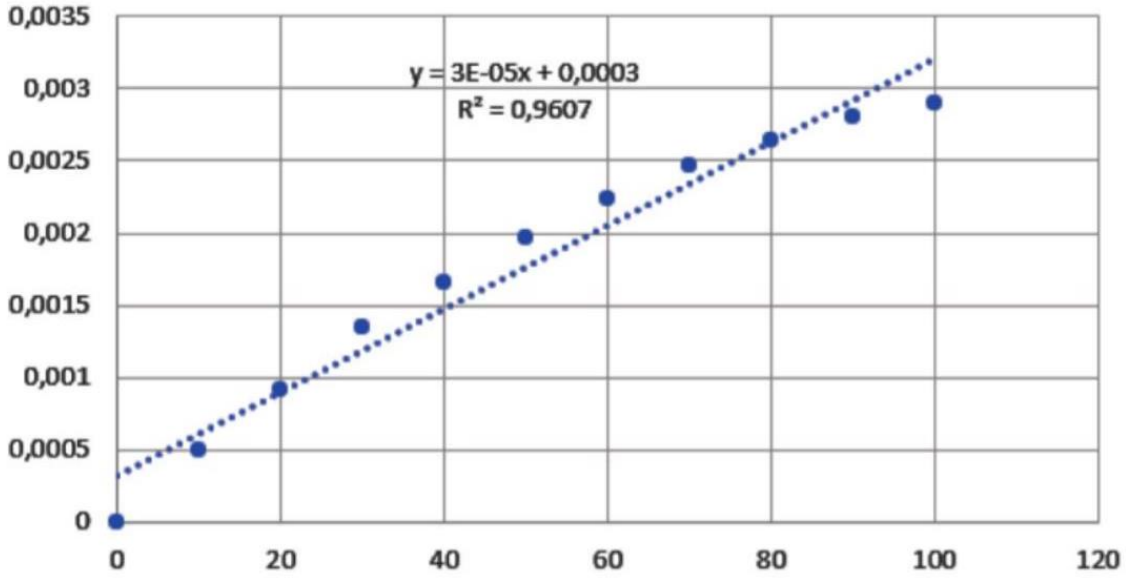
Avec c une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

4. En déduire que la raideur k du ressort équivalent aux deux ressorts accrochés ensemble est telle que $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

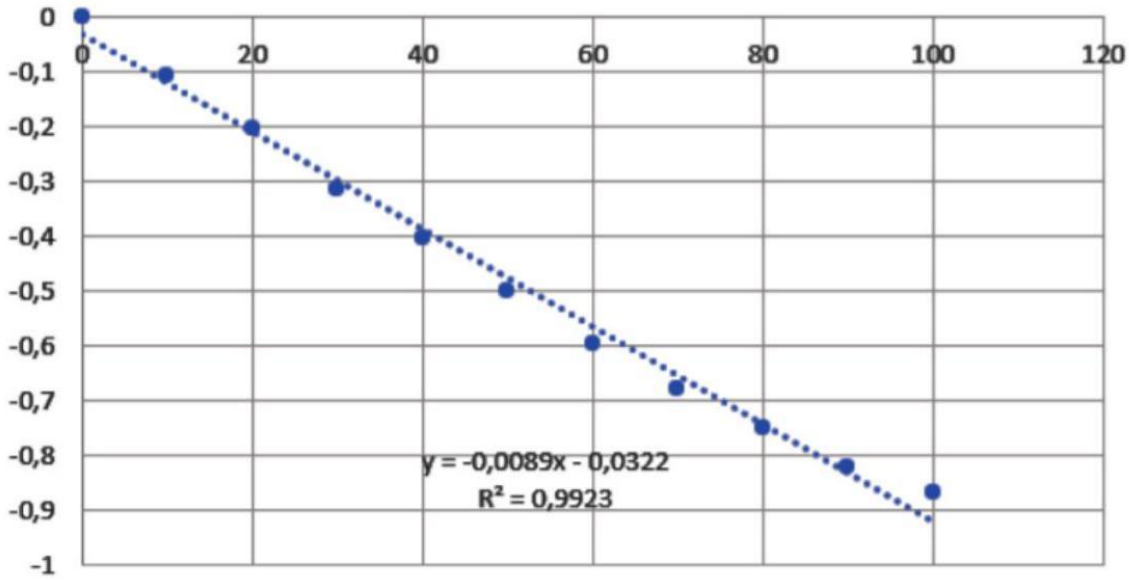
5. En déduire si la constante de raideur d'un ressort est multipliée ou divisée par 2 lorsqu'on le coupe en deux moitiés égales. Justifier.

ANNEXE 1 : graphes pour l'exercice 1

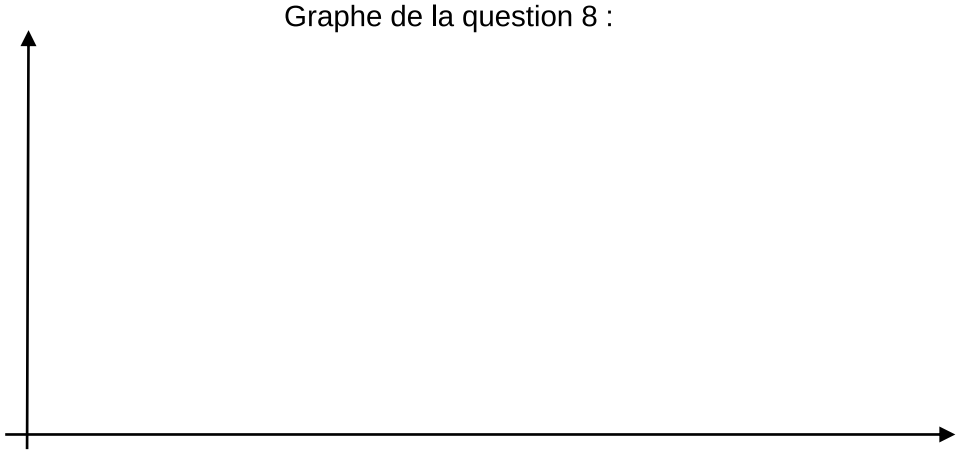
Graphe : $x = f(t)$



Graphe : $\ln(1-200x) = f(t)$



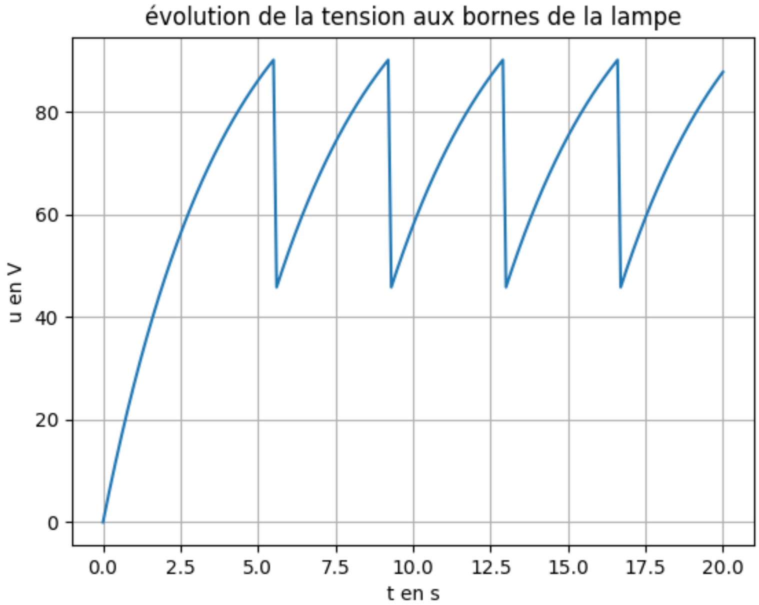
Graphe de la question 8 :



ANNEXE 2 : programmes pour l'exercice 2

Programme 1

```
import matplotlib.pyplot as plt
#valeurs numériques
E = 120 #en V
R = 2E4 #en Ohm
C = 200E-6 #en F
Ua = 90 #en V
Ue = 70 #en V
Ra = 1E3 #en Ohm
#valeurs initiales
t = 0 #en s
u = 0 #en V
#Création des listes Lt et Lu
Lt =  [0]
Lu = [0]
allum = 0 #booléen
dt = 0.1 #en s
tmax = 20 #en s
while t < tmax :
    t +=  dt
    if allum == 0 :
        u += dt*(E/R - u/R)/C
        if ………… :
            allum = 1
    else :
        u += dt*(E/R - u/R - u/Ra)/C
        if ………… :
            allum = 0
    Lt.append(t)
    Lu.append(u)
#Tracé du graphe
plt.figure()
plt.plot(Lt,Lu)
plt.title('évolution de la tension aux bornes de la lampe')
plt.xlabel('t en s')
plt.ylabel('u en V')
plt.grid()
plt.show()
```



Programme 2

```
while t < tmax :
    t +=  dt
    u += …
    if allum == 0 :
        if ………… :
            allum = 1
    else :
        if ………… :
            allum = 0
    Lt.append(t)
    Lu.append(u)
```