DS 3 - CORRECTION

Questions de cours

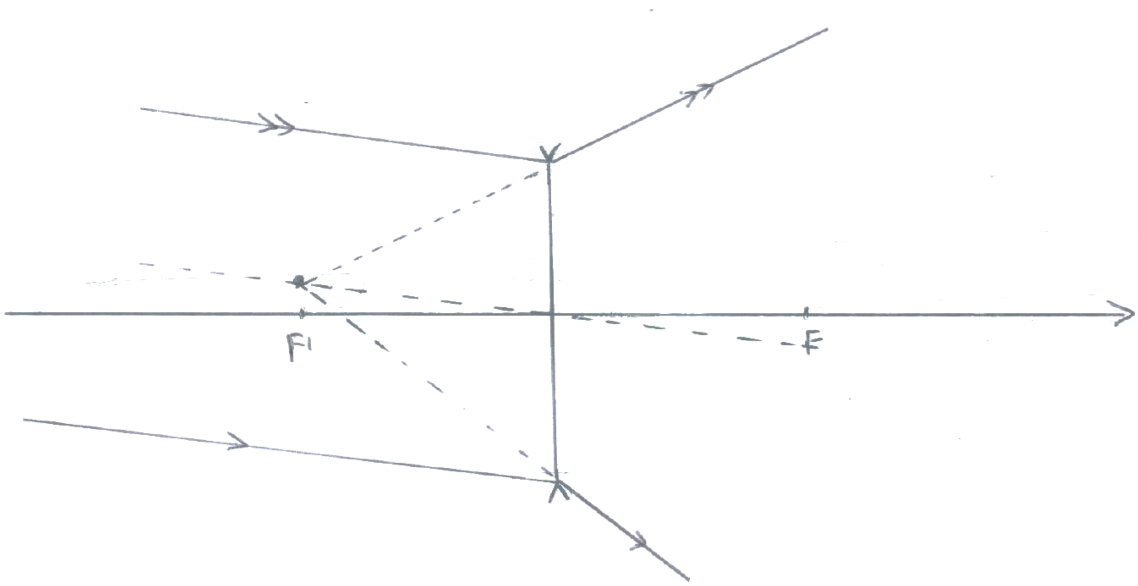
1. $[\mathrm{R}_1](t) = c_0 - \alpha_1 kt$

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la date à laquelle, pour une réaction totale, la concentration en réactif limitant (R_1 ici) a été divisée par 2.

Donc à la date $t_{1/2}$: $[R_1](t_{1/2}) = \frac{c_0}{2} = C_0 - \alpha_1 k t_{1/2}$

On en déduit : $\boxed{t_{1/2} = \frac{c_0}{2\alpha_1 k}}$

2. Faisceau émergent



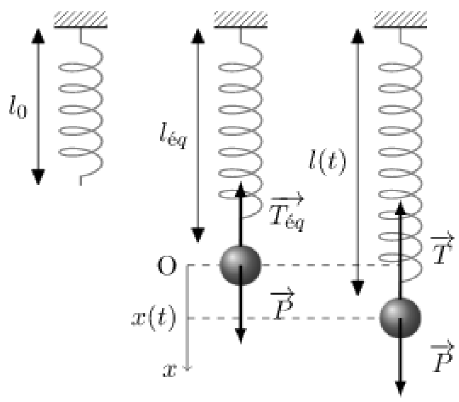
3. $L_\times C = \frac{L}{R} \times RC = \tau_{RL} \times \tau_{RC} \Rightarrow \boxed{[L_\times C] = T^2}$

4. Système : masse *m* assimilée à un point.

Référentiel : du laboratoire supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

- le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_x$
- la force de rappel du ressort : $\vec{T} = -k(l_{eq} + x - l_0)\vec{u}_x$



Á l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} = mg\vec{u}_x - k(l_{eq} + 0 - l_0)\overrightarrow{u_x} = \vec{0}$

Par projection : $mg - k(l_{e_1} - l_0) = 0$

On en déduit : $\boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$

Exercice 1 : chimie

1. Le squelette contient 3 kg de phosphate de calcium. La proportion en masse du calcium y est de

$$\frac{3M_{\mathrm{Ca}}}{3M_{\mathrm{Ca}}+2M_{\mathrm{P}}+8M_{\mathrm{O}}} \approx 0{,}4$$

ce qui donne une masse de calcium valant environ $\boxed{m_{\mathrm{Ca}} = 1{,}2\ \mathrm{kg}}$

2. La masse de calcium renouvelée est d'environ 250 g chaque année, soit $0{,}7\ \mathrm{g}$ par jour. Comme un litre de lait contient $1{,}1\ \mathrm{g}$ de calcium, il faudrait en boire un peu plus de $\boxed{600\ \mathrm{mL}}$ par jour si le lait était la seule source de calcium.

3. Établissons le tableau d'avancement de la réaction

	$\mathrm{CaCO_{3(s)}} + 2\mathrm{H^+_{(aq)}} = \mathrm{CO_{2(g)}} + \mathrm{H_2O_{(l)}} + \mathrm{Ca^{2+}_{(aq)}}$				
Pour $x = 0$	$n_{\mathrm{CaCO_3}}$	$n_{\mathrm{H^+}}$	0	-	0
Pour x qcq	$n_{\mathrm{CaCO_3}} - x$	$n_{\mathrm{H^+}} - 2x$	x	-	x

Il vient immédiatement que : $n_{\mathrm{CO_2}} = x$

Et d'après l'équation d'état des gaz parfaits : $x = n_{\mathrm{CO_2}} = \frac{p_{\mathrm{CO_2}}V}{RT}$

D'où, à $t = 100\ \mathrm{s}$: $\boxed{x = \frac{p_{\mathrm{CO_2}}V}{RT} = 2{,}87\mathrm{mmol}}$

4. Par définition de la concentration : $n_{\mathrm{H^+}} = \left[\mathrm{H^+_{(aq)}}\right]V_0$

Le bilan de matière de la question 3 donne : $\boxed{n_{\mathrm{H^+}} = c_aV_0 - 2x \ \text{ soit } \ x = \frac{c_aV_0 - n_{\mathrm{H^+}}}{2} = 0{,}5\ \mathrm{mmol}}$ à t = 10 s

Les deux tableaux étant identiques, les deux méthodes sont bien cohérentes.

5. La vitesse volumique de réaction est égale, au coefficient stœchiométrique près, à la vitesse de disparition des réactifs : $v = -\frac{1}{2}\frac{d[\mathrm{H^+}]}{dt}$

Supposons que la réaction est d'ordre 0 par rapport à l'ion oxonium

$$-\frac{1}{2}\frac{d[\mathrm{H^+}]}{dt} = k$$

Intégrons cette relation entre $t = 0$ et t quelconque

$$\int_{c_a}^{[\mathrm{H^+}](t)} d[\mathrm{H^+}] = -\int_0^t 2k\,dt' \Leftrightarrow [\mathrm{H^+}](t) = c_a - 2kt$$

On en déduit :

$$x = \frac{c_aV_0 - n_{\mathrm{H^+}}}{2} = \frac{c_aV_0 - [\mathrm{H^+}](t)V_0}{2} = \frac{c_aV_0 - (c_a - 2kt)V_0}{2} = kV_0t$$

d'où $\boxed{x = kV_0t}$

6. Supposons que la réaction est d'ordre 1 par rapport à l'ion oxonium

$$-\frac{1}{2}\frac{d[\mathrm{H^+}]}{dt} = k[\mathrm{H^+}]$$

Intégrons cette relation entre $t = 0$ et t quelconque

$$\int_{c_a}^{[\mathrm{H}^+](t)} \frac{d[\mathrm{H}^+]}{[\mathrm{H}^+]} = -\int_0^t 2kdt' \Leftrightarrow \ln\left(\frac{[\mathrm{H}^+]}{c_a}\right) = -2kt$$
$$\Leftrightarrow [\mathrm{H}^+](t) = c_a \exp(-2kt)$$

On en déduit :

$$n_{\mathrm{H}^+} = c_a V_0 - 2x \Leftrightarrow c_a V_0 \exp(-2kt) = c_a V_0 - 2x$$
$$\Leftrightarrow \exp(-2kt) = \frac{c_a V_0 - 2x}{c_a V_0}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ln\left(\frac{c_a V_0 - 2x}{c_a V_0}\right) = -2kt}$$

7. Supposons que la réaction est d'ordre 2 par rapport à l'ion oxonium :

$$-\frac{1}{2}\frac{d[\mathrm{H}^+]}{dt} = k[\mathrm{H}^+]^2$$

Intégrons cette relation entre $t = 0$ et t quelconque

$$\int_{c_a}^{[\mathrm{H}^+](t)} -\frac{d[\mathrm{H}^+]}{[\mathrm{H}^+]^2} = \int_0^t 2kdt' \Leftrightarrow \frac{1}{[\mathrm{H}^+]} - \frac{1}{c_a} = 2kt$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{[\mathrm{H}^+]} = \frac{1}{c_a} + 2kt$$

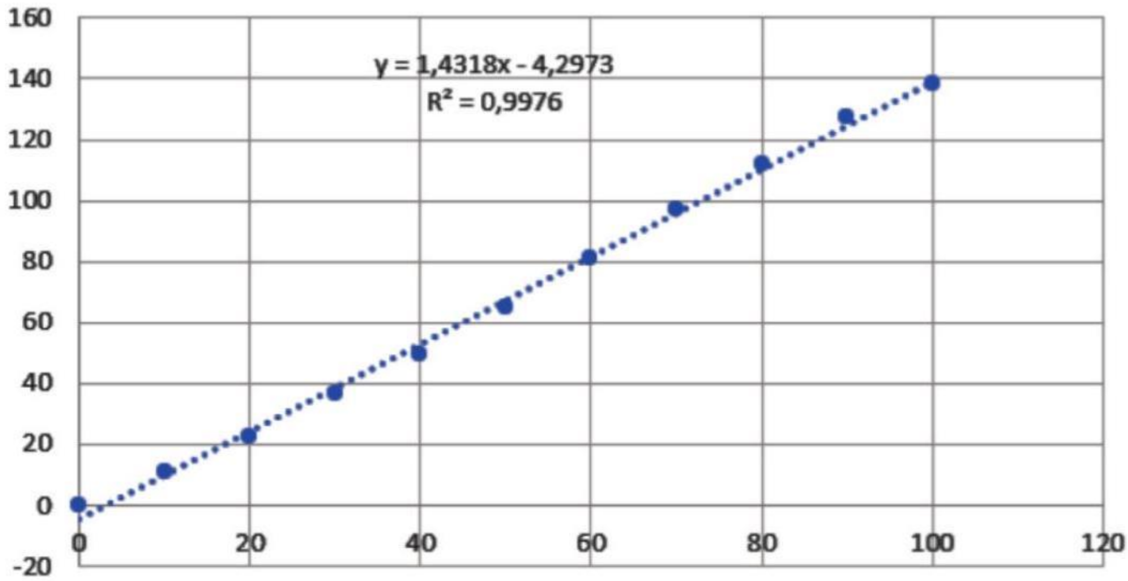
On en déduit :

$$n_{\mathrm{H}^+} = c_a V_0 - 2x \Leftrightarrow \frac{1}{[\mathrm{H}^+]V_0} = \frac{1}{c_a V_0 - 2x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{c_a V_0} + \frac{2kt}{V_0} = \frac{1}{c_a V_0 - 2x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{c_a V_0 - 2x} - \frac{1}{c_a V_0} = \frac{2kt}{V_0}$$

8. Compte tenu de la relation démontrée à la question 7 : $\frac{1}{c_a V_0 - 2x} - \frac{1}{c_a V_0} = \frac{2kt}{V_0}$

Il faut tracer $\frac{1}{c_a V_0 - 2x}$ en fonction du temps.

Graphe : $\frac{1}{0{,}01 - 2x} - 100 = f(t)$



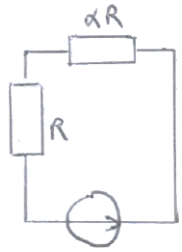
9. La courbe tracée ci-dessus est la plus proche d'une droite (meilleur coefficient de corrélation R^2). La réaction est donc d'ordre 2 : $v = k[\mathrm{H_3O^+}]^2$

En comparant l'expression obtenue à la question ci-dessus avec l'équation de la droite tracée, on en déduit que :

$$\frac{2k}{V_0} = 1{,}43 \Leftrightarrow \boxed{k = 7{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mol^{-1} \cdot\ L \cdot\ s^{-1}}}$$

10. Le pH de l'océan est de 8 alors qu'on part ici d'un pH de 1, c'est-à-dire d'une concentration en $\mathrm{H^+}$qui est 10^7 fois plus faible. La réaction étant d'ordre 2 par rapport à $\mathrm{H^+}$, la vitesse dans l'océan est 10^{14} fois plus faible que dans l'expérience réalisée. Ainsi, <u>la dissolution des coraux dans l'océan est très lente... et ils peuvent renouveler leur coquille</u>.

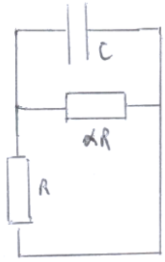
Exercice 2 : circuit électrique du premier ordre



1. En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et le circuit équivalent est donc celui représenté ci-contre.

D'après le pont diviseur de tension, on en déduit : $\boxed{u_\infty = \frac{\alpha R}{R+\alpha R} E_0 = \frac{\alpha E_0}{1+\alpha}}$

2. C'est la solution de l'équation homogène $u_H(t)$ qui correspond au régime transitoire. Sa forme générale étant indépendante de E_0, on peut choisir $E_0 = 0\ V$ et on obtient donc un circuit équivalent avec un condensateur en dérivation avec deux résistances R et αR donc avec la résistance équivalente $R_{eq} = \frac{\alpha R}{1+\alpha}$



On en déduit donc la constante de temps du circuit : $\boxed{\tau_\alpha = R_{eq} C = \frac{\alpha RC}{1+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_0}$

3. Si la lampe est allumée, $\mathcal{D}$ est un assez bon conducteur donc sa résistance est « faible ».

Si la lampe est éteinte $\mathcal{D}$ est un assez bon isolant donc sa résistance est « grande ».

4. Lampe éteinte : $\alpha = \frac{R_L}{R} = \frac{R_\ell}{R} \gg 1$ donc $\boxed{\tau_\alpha \approx \tau_0 = 4\ s}$

Lampe allumée : $\alpha = \frac{R_L}{R} = \frac{R_a}{R} = \frac{1}{20}$ donc $\boxed{\tau_\alpha = \frac{\frac{1}{20}}{1+\frac{1}{20}}\tau_0 = \frac{4}{21} = 0{,}19\ s}$

5. D'après la question 1, $u_\infty = \frac{\alpha E_0}{1+\alpha}$

Si la lampe ne s'allume jamais alors $\alpha \gg 1$ et $\lim_{t\to\infty} u(t) = \boxed{E_0}$

Si elle reste allumée alors $\alpha = \frac{1}{20}$ et $\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{\frac{1}{20}}{1+\frac{1}{20}} E_0 = \boxed{\frac{1}{21} E_0}$

Le système oscillera donc si $E_0 > U_a$ et $\frac{1}{21}E_0 < \mathrm{U}_e \Leftrightarrow U_a < E_0 < 21\mathrm{U}_e$

Ici, avec $90\ V < E_0 = 120\ V < 1470\ V$ V donc <u>le système oscillera</u>.

6. La ligne 21 correspond au cas de la lampe éteinte (allum == 0) donc on remplace $\mathcal{D}$ par un interrupteur ouvert et l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ est donc (voir cours ; cas du dipôle *RC* série) :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{Rc}u = \frac{E}{Rc} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{C}\left[\frac{E}{R} - \frac{u}{R}\right]$$

En approximant la dérivée : $\frac{du}{dt} \approx \frac{u(\mathrm{t}+dt) - u(t)}{dt}$

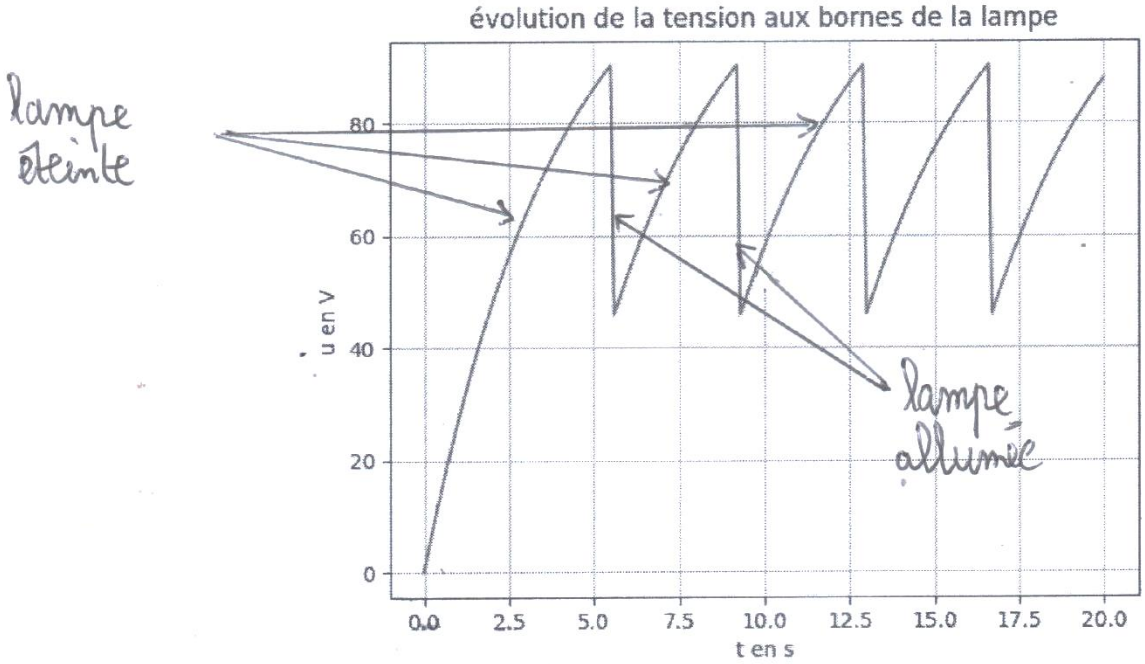
On en déduit donc : $u(t + \mathrm{d}t) = u(t) + \frac{du}{dt} \times dt = u(t) + \frac{dt}{C}\left[\frac{E}{R} - \frac{u}{R}\right]$

Ce qui s'écrit en Python : `u += dt*(E/R - u/R)/C`

7. Lignes complétées :

22 $\boxed{\text{if u > Ue :}}$

26 $\boxed{\text{if u < Ua :}}$



8. Ligne 20 : $\boxed{\text{u += dt*(E/R - u/R - allum*u/Ra)/C}}$

9. La lampe passe de l'état éteint à allumé par exemple au point *A*. Or elle passe à l'état allumé lorsque $u > U_a$ donc $\boxed{a = U_a = 90\text{ V}}$.

<u>Le pas *dt* = 0,1 s n'est pas suffisamment petit</u> devant la constante de temps caractéristique $\tau_\alpha = 0{,}19\ s$ de la phase durant laquelle la lampe est allumée et la méthode d'Euler ne fonctionne alors pas bien ce qui explique la valeur de 47 V au lieu de $\boxed{70\text{ V}}$.

10. On observe bien sur la figure 2 que la lampe va clignoter. La période du clignotement est Δt_1 qui est de l'ordre de Δt_0 / 2 avec Δt_0 de l'ordre de la constante de temps $\tau_\alpha = 4\ s$ (lorsque la lampe est éteinte).

$\Delta t_1 \approx 2$ s > 0,1 s donc $\boxed{\text{le clignotement va être visible à l'œil nu}}$.

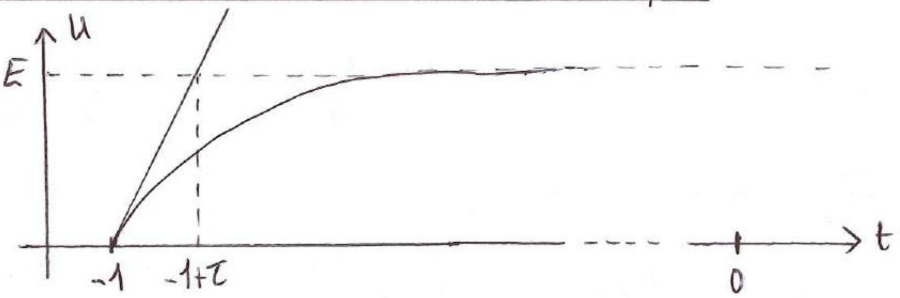
Exercice 3 : oscillateur électrique

1. L'interrupteur étant en position 2, le condensateur n'est relié à aucun générateur. S'il avait été chargé à une date t, il se serait forcément déchargé dans la résistance R et la bobine. Donc $\boxed{u = 0}$

2. étude d'un dipôle RC série (Voir cours)

$$\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec } \tau = r_g C = 50\mu s}$$

3.



4. $1\,s \gg \tau$ donc au bout d'une seconde la tension u a atteint sa valeur en régime permanent $\boxed{u(1s) \simeq u_{sp} = E}$

5. • A $t=0^-$: $i_2(0^-) = 0$ car l'interrupteur est en position 1
$u(0^-) = E$ d'après la question précédente.

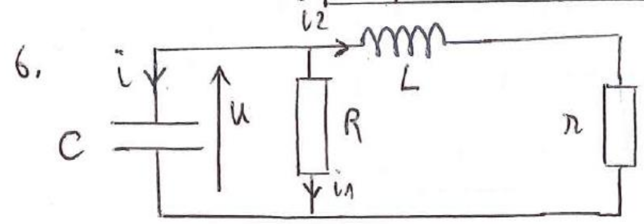
Ces 2 grandeurs étant continues on en déduit : $i_2(0^+) = 0$ et $u(0^+) = E$
or $u = R i_1$ donc $i_1(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = E/R$

• Au bout d'un "temps infini" :
$i = C\frac{du}{dt} = 0$ car $u = \text{cste}$ et $u = 0$ car le condensateur est déchargé
donc $i_1 = \frac{u}{R} = 0$ et $i_2 = i - i_1 = 0$

En résumé :

	u	i_1	i_2
$t=0^+$	E	E/R	0
t_∞	0	0	0

6.



Loi des noeuds : $-i = i_1 + i_2 \iff i_2 = -i - i_1$ (1)

Lois de fonctionnement :
$$\begin{cases} i = C\dfrac{du}{dt} & (2) \\ i_1 = u/R & (3) \\ u = L\dfrac{di_2}{dt} + r i_2 & (4) \end{cases}$$

En reportant l'expression (1) dans l'équation (4), on obtient :

$$u = -L\frac{di}{dt} - L\frac{di_1}{dt} - ri - ri_1$$

et d'après les relations (2) et (3) : $u = -LC\dfrac{d^2u}{dt^2} - \dfrac{L}{R}\dfrac{du}{dt} - rC\dfrac{du}{dt} - \dfrac{r}{R}u$

$$\iff \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right)u = 0}$$

7. Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{r+R}{RLC}} \approx \boxed{3,2\times10^3\ rad.s^{-1}} \ \text{(pulsation propre)} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{L + rRC}{RLC} \end{cases}$$

donc $Q = \sqrt{\dfrac{r+R}{RLC}} \times \dfrac{RLC}{L + rRC} = \dfrac{\sqrt{(r+R)RLC}}{L + rRC} \approx \boxed{2,9}$ (facteur de qualité)

. $Q > \frac{1}{2}$ donc le régime est pseudo-périodique.

8. $\begin{cases} \text{A } t = 0^+ : u(0^+) = E \text{ et } \dfrac{du}{dt}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = \dfrac{i_1(0^+) + i_2(0^+)}{C} = \dfrac{E/R}{C} = \dfrac{E}{RC} \\ \text{Puis } u \text{ croît (dans un premier temps).} \\ \text{Puis } u(t_\infty) = 0 \text{ et } i(t_\infty) = i_1(t_\infty) + i_2(t_\infty) = 0 \end{cases}$

environ 3 oscillations visibles car Q = 3

+ graphe

4/ Détermination expérimentale des valeurs de R, L et C

9. • Au bout d'un "temps infini" $u_L = L\frac{di_E}{dt} = 0$ donc $u = E'$: la valeur de E' est donc la valeur de u en régime permanent et on lit $\boxed{E' \simeq 2,75\,V}$

• On mesure $7T = 10 \times 0,2$ donc $T \simeq \boxed{0,29\,ms}$

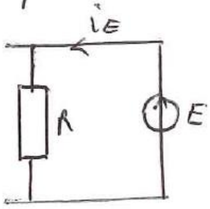
• $\delta = \ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right) \simeq \boxed{0,7}$

10. Puisque $\delta \simeq \frac{\pi}{Q}$ on en déduit $Q \simeq \frac{\pi}{\delta} \simeq \boxed{4,5}$

et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ donc $\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\sqrt{1-1/4Q^2}} \simeq \boxed{2,2\times10^4\ \text{rad.s}^{-1}}$

11. D'après l'expérience 1 et puisqu'en régime permanent le circuit est équivalent au schéma ci-contre :

$R = \frac{E}{i_E} \simeq \boxed{9,8\,k\Omega}$



De plus, dans l'expérience 2 : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

donc $\begin{cases} \omega_0^2 = 1/LC & (1) \\ \frac{Q^2}{R^2} = \frac{C}{L} & (2) \end{cases}$

$(1)\times(2) \Rightarrow \frac{\omega_0^2 Q^2}{R^2} = \frac{C}{L}\times\frac{1}{LC} = \frac{1}{L^2}$ donc $L = \frac{R}{Q\omega_0} = \boxed{9,7\times10^{-2}\,H}$

$(2)/(1) : \frac{C/L}{1/LC} = C^2 = \frac{Q^2/R^2}{\omega_0^2}$ donc $C = \frac{Q}{R\omega_0} = \boxed{2,1\times10^{-8}\,F}$

Exercice 4 : oscillateur mécanique

1. Forces de rappel :

$$\overrightarrow{F_{R_1/A}} = -k_1(x_A - l_0)\overrightarrow{u_x}$$

$$\vec{F}_{R_2/A} = +k_2(x_m - x_A - l_0)\vec{u}_x$$

+ schéma

2e loi de Newton appliquée à A dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\overrightarrow{P_A} + \vec{R}_A + \vec{F}_{R_1/A} + \overrightarrow{F_{R_2/A}} = m_A\vec{a}_A = m_A\ddot{x}_A\overrightarrow{u_x}$$

Projeté sur $\vec{u}_x$ $\boxed{-k_1(x_A - l_0) + k_2(x_m - x_A - l_0) = m_A\ddot{x}_A}$

2. Si $m_A \approx 0$ alors $k_2(x_m - x_A - l_0) = k_1(x_A - l_0)$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_A = \frac{1}{k_1+k_2}[k_2x_m + (k_1 - k_2)l_0]} \quad (1)$$

3. Force de rappel : $\vec{F}_{R_2/m} = -k_2(x_m - x_A - l_0)\vec{u}_x$

+ schéma

2e loi de Newton appliquée à m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P}_m + \vec{R}_m + \vec{F}_{R_2/m} = m\vec{a} = m\ddot{x}_m\vec{u}_x$$

Projeté sur $\vec{u}_x$: $-k_2(x_m - x_A - l_0) = m\ddot{x}_m$

à l'aide de (1) : $m\ddot{x}_m + k_2x_m - \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}[k_2x_m + (k_1 - k_2)l_0] = k_2l_0$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}_m + \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x_m = k_2l_0 + \frac{k_2(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}l_0 = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}l_0$$

$$du\ type : \boxed{m\ddot{x}_m + \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x_m = c \quad \text{avec } c = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}l_0}$$

4. C'est la même équation différentielle que celle d'une masse *m* accrochée à un ressert de raideur k : $(m\ddot{x} + kx = 0)$ avec ici $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$

Donc les 2 ressorts accrochés sont équivalents à un seul de raideur k telle que $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

5. Soit un ressort de raideur k constitué de 2 ressorts identiques de raideur $k_{1/2}$ accrochés entre eux.
$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_{1/2}} + \frac{1}{k_{1/2}} = \frac{2}{k_{1/2}}$ d'après la question 4.
Donc $\boxed{k_{1/2} = 2k}$: la raideur du ressort coupé est deux fois plus grande que celle du ressort initial.