

# DS 5 - CORRECTION

## Exercice 1 : chimie

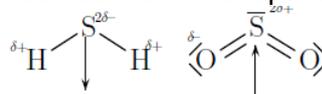
### Le soufre

1. O et S ont tous les deux la même structure électronique :  $ns^2np^4$ , O étant le plus électronégatif (période précédente et même colonne).

2. On obtient les formules suivantes :  $\text{H}-\bar{\text{S}}-\text{H}$     $\langle \text{O}=\bar{\text{S}}=\text{O} \rangle$     $\langle \text{O}=\bar{\text{S}} \begin{array}{l} \text{O} \\ \text{O} \end{array} \rangle$

- $\text{H}_2\text{S}$  sera coudée, avec un angle inférieur à  $109,5^\circ$  puisqu'un doublet non-liant est plus répulsif.
- $\text{SO}_2$  sera coudée, avec un angle inférieur à  $120^\circ$  pour la même raison.
- $\text{SO}_3$  sera triangulaire avec des angles rigoureusement égaux à  $120^\circ$  puisque tous ses atomes reliés à S sont identiques.

3. On a  $\chi(\text{H}) < \chi(\text{S}) < \chi(\text{O})$  d'où l'on déduit les moments dipolaires suivants :



### Isomères Z et E

4. Les isomères Z et E du dichloroéthène sont aprotiques car ils ne comportent pas d'hydrogène liés à un élément très électronégatif O, N ou F.

Dans les deux isomères, les liaisons polaires sont les liaisons C-Cl, car la différence d'électronégativité entre C et H est trop faible. Puisque  $\text{Cl}(\chi = 3,20)$  est plus électronégatif que  $\text{C}(\chi = 2,20)$ , le moment dipolaire pointe vers H.

Dans le Z-dichloroéthène (ci-dessous à gauche), les moments dipolaires des deux liaisons ont une somme non-nulle et la molécule sera donc polaire.

En revanche, le E-dichloroéthène (ci-dessous à droite) sera apolaire car les deux moments dipolaires y sont rigoureusement opposés.



5. Il n'est pas surprenant que la température d'ébullition de l'isomère Z soit supérieure puisque ses molécules interagissent plus fortement par interactions de Keesom entre ses dipôles permanents.

### Le phosphore

6. et 7.

### Ions contenant les atomes C, N et O

8.

On ne rencontre pas l'ion  $\text{CON}^-$  car les seules formules de Lewis envisageables ne contiennent pas moins d'un total de 5 charges formelles.

## Exercice 2 : récupérateur d'énergie en discothèque (S1 et S2)

1. force de rappel du ressort :  $\boxed{\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{e}_x}$

2. système : dalle de masse  $m$

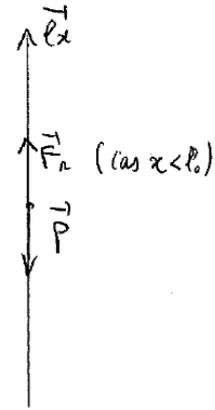
référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures :

pooids :  $\vec{P} = -mg \vec{e}_x$

force de rappel :  $\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{e}_x$

force de frottement :  $\vec{f} = -D \dot{x} \vec{e}_x$



À l'équilibre ( $\dot{x} = 0$  et  $\ddot{x} = 0$ ) :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow -mg \vec{e}_x - k(x_{\text{eq}} - l_0) \vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -mg - k(x_{\text{eq}} - l_0) = 0 \text{ par projection sur } \vec{e}_x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

homogénéité :  $\left[ \frac{mg}{k} \right] = \frac{[F]}{[k]} = L$

pertinence physique :  $x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k} < l_0$  : ressort comprimé.

3. système { dalle + danseur } : à l'équilibre  $M \vec{g} + \vec{F}_{\text{dalle/danseur}} = \vec{0}$   
 et  $\vec{F}_{\text{danseur/dalle}} = -\vec{F}_{\text{dalle/danseur}} = M \vec{g}$  (force à prendre en compte)

La relation précédente devient donc :  $x'_{\text{eq}} = l_0 - \frac{(m+M)g}{k}$

Et  $S = x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}} = \boxed{\frac{Mg}{k}}$

4. Avec  $M = 70 \text{ kg}$  et  $S = 10 \text{ cm}$ , on calcule  $\boxed{k = \frac{Mg}{S} = 7 \times 10^4 \text{ N.m}^{-2}}$

5. En prenant en compte les 2 forces proposées, la 2<sup>e</sup> loi de Newton s'écrit :

$$m \vec{a} = F \vec{e}_x = \alpha \vec{v} - mg \vec{e}_x - k(x - l_0) \vec{e}_x$$

et par projection sur  $\vec{e}_x$  :  $m \ddot{x} = F - D \dot{x} - \alpha \dot{x} - mg - k(x - l_0)$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{D+\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} \left( x - l_0 + \frac{mg}{k} \right) = \frac{F}{m}$$

en posant  $X = x - x_{\text{eq}} = x - l_0 + \frac{mg}{k}$  donc  $\dot{X} = \dot{x}$  et  $\ddot{X} = \ddot{x}$

on obtient :  $\ddot{X} + \left( \frac{D+\alpha}{m} \right) \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F}{m} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{k}{m} \\ b_0 = \frac{F}{m} \end{array} \right.$

6. on estime la fréquence du mouvement du danseur à environ 1 Hz (1 pas par seconde) donc  $\omega = 2\pi f \approx \boxed{10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$
7.  $|\underline{Z}_L| = L\omega = 1,67 \times 10^{-3} \times 10 \approx 10^{-2} \Omega \ll R = 10,2 \Omega$   
L'effet de l'inductance propre est donc bien négligeable
8. D'après la loi du pont diviseur de tension:  $v = \frac{R_L}{R_L + R} u$
9. La puissance électrique reçue par le réseau de LED est  $P_L(t) = v(t) \times i(t) = v(t) \times \frac{v(t)}{R_L} = \frac{1}{R_L} v^2(t) = \frac{1}{R_L} \left( \frac{R_L}{R_L + R} \right)^2 u^2(t)$   
d'où  $P_L(t) = \frac{R_L}{(R_L + R)^2} (k_e \gamma \dot{x}(t))^2$  donc  $A = \frac{R_L}{(R_L + R)^2}$
10. puissance fournie par la fem:  $P_u(t) = u(t) \times i(t) = u(t) \times \frac{v(t)}{R_L} = \frac{1}{R_L + R} u^2(t)$   
donc  $P_u(t) = \frac{(k_e \gamma)^2}{(R_L + R)} \dot{x}^2(t)$   
et la puissance prélevée à la dalle:  $P_p(t) = \frac{P_u(t)}{\eta} = \frac{(k_e \gamma)^2}{\eta(R_L + R)} \dot{x}^2(t)$
11. La puissance d'une force de frottement du type  $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$  est  $\mathcal{P} = \vec{F}_\alpha \cdot \vec{v} = -\alpha \|\vec{v}\|^2 = -\alpha \dot{x}^2(t)$  pour un mouvement selon  $\vec{e}_x$   
Donc tout se passe comme si la dalle était soumise à une force de frottement du type  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$  avec  $\alpha = \frac{(k_e \gamma)^2}{\eta(R_L + R)}$  par identification des expressions de  $\mathcal{P}$  et  $P_p$ .
12. AN:  $\alpha = 3,0 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$   
 $D \ll \alpha \Leftrightarrow |D \dot{x}| \ll |\alpha \dot{x}|$ : l'amortissement mécanique est négligeable devant celui dû à la conversion mécanique en puissance électrique.
13.  $X(t) \approx \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \frac{1}{1-Q^2} (e^{-\omega_0 t} - Q^2 e^{-\omega_0 t/Q}) \right]$  donc  $\dot{X}(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0}{1-Q^2} (Q e^{-\omega_0 t} - \frac{Q^2}{Q} e^{-\omega_0 t/Q})$   
D'où  $P_L(t) = A [K_t \gamma \dot{X}(t)]^2 = A \left[ K_t \gamma \frac{F_0}{k} \frac{Q \omega_0}{1-Q^2} (e^{-\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t/Q}) \right]^2 = K F_0^2 (e^{-\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t/Q})^2$
14. Le régime est aperiodique donc  $Q < \frac{1}{2}$  et  $Q^2 < \frac{1}{4}$  donc  $\omega_0 Q < \frac{1}{4} \frac{\omega_0}{Q}$ ;  $e^{-\omega_0 t/Q}$  décroît par conséquent plus vite que  $e^{-\omega_0 t}$  et le temps caractéristique est  $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$

15. Que ce soit lorsque la force appliquée à la dalle passe de 0 à  $F_0$  ou de  $F_0$  à 0, l'équation différentielle étudiée a la même forme (seule le second membre change) donc on observe le même type d'évolution. Il est donc normal d'observer une décroissance de  $P_L$  lorsque la force appliquée à la dalle passe de 0 à  $F_0$  et une autre pour le passage de  $F_0$  à 0.

16. 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{valeur moyenne : } F_0 \approx 1000 \text{ N} \\ \text{amplitude : } F_1 \approx \frac{1600}{2} = 800 \text{ N} \\ \text{pulsation : } \omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{(1,8/s)} \approx 18 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{array} \right.$$

17. En complexe, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\underline{X}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{X}} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_1}{m} e^{j\omega t} e^{j\psi} \quad \text{avec } \underline{X}(t) = X_0 e^{j\omega t} e^{j\psi}$$

donc  $- \omega^2 X_0 e^{j\psi} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} X_0 e^{j\psi} + \omega_0^2 X_0 e^{j\psi} = \frac{F_1}{m} e^{j\psi}$  après simplification par  $e^{j\omega t}$

$$\Leftrightarrow X_0 e^{j\psi} = \frac{\frac{F_1}{m} e^{j\psi}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

$$\text{et } X_0 = |X_0 e^{j\psi}| = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

18.  $\underline{V}(t) = \dot{\underline{x}}(t) = \dot{\underline{X}}(t) = j\omega \underline{X}(t)$

donc  $V_0 = |\underline{V}(t)| = |j\omega \underline{X}(t)| = \omega X_0$

19. à basse fréquence :  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \langle P_L(\omega) \rangle \rightarrow 0$

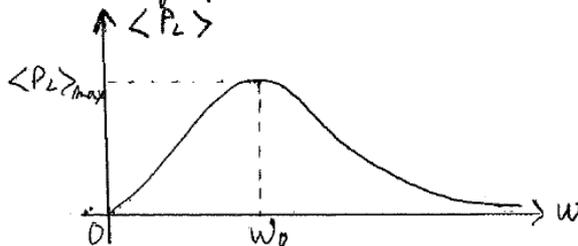
à haute fréquence :  $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \langle P_L(\omega) \rangle \rightarrow 0$

•  $\langle P_L \rangle = 0$  à très basse fréquence s'explique par le fait que la très basse fréquence correspond au cas d'une force exercée sur la dalle quasi constante donc à  $X(t) = \text{constante}$  en régime permanent donc  $\Omega = 0$  et  $P_L = 0$

•  $\langle P_L \rangle = 0$  à très haute fréquence s'explique par le fait qu'à ces fréquences, la dalle ne bouge pas (car le temps caractéristique  $\tau$  des mouvements de la dalle est très supérieur à la période  $T = \frac{1}{f}$  de la force excitatrice  $F$ ).

20.  $\langle P_L \rangle$  est maximale lorsque le dénominateur est minimal, ce qui se produit pour  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \boxed{65 \text{ rad. s}^{-1}}$

A cette fréquence  $\langle P_L \rangle_{\max} = \frac{(F_1 K_0)^2 R_L \delta^2}{2 K_0^4 \delta^4} = \boxed{\frac{F_1^2 R_L^2 R_C}{2 K_0^2 \delta^2}}$



21.  $f_1 = 115 \text{ battements/min} = 1,9 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \omega_1 = 12 \text{ rad. s}^{-1}$   
 $f_2 = 125 \text{ battements/min} = 2,1 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \omega_2 \approx 13 \text{ rad. s}^{-1}$

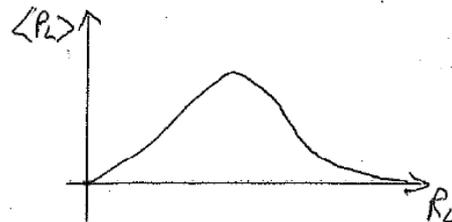
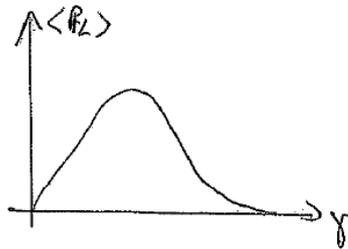
or  $\langle P_L \rangle(\omega)$  est une fonction croissante sur  $[0, \omega_0]$

et  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_0$  donc  $P_L(\omega_1) < P_L(\omega_2)$

L'équipe 2 fournit donc plus d'énergie et a gagné le duel.

22.  $\bar{\omega}$  et  $R_L$  fixes,  $P_L(\delta)$  est du type:  $P_L(\delta) = \frac{A \delta^2}{B \delta^4 + C}$   
 $\bar{\omega}$  et  $\delta$  fixes,  $P_L(R_L)$  est du type  $P_L(R_L) = \frac{D R_L}{E + F R_L + G R_L^2}$

d'où les traces :



Pour voir sur le graphe de la figure 6, l'évolution de  $\langle P_L \rangle$  en fonction de  $\delta$ , il faut étudier la courbe obtenue dans un plan vertical à  $R_L$  constant et pour voir l'évolution de  $\langle P_L \rangle$  en fonction de  $R_L$ , il faut étudier la courbe obtenue dans un plan vertical à  $\delta$  constant.  
 on retrouve alors les évolutions décrites ci-dessus.

23. L'objectif étant de récupérer une puissance  $\langle P_L \rangle$  maximale, il faut judicieusement choisir un couple de valeurs de l'ordre de

$$\left\{ \begin{array}{l} R_L \approx 300 \Omega \\ \delta \approx 2 \times 10^4 \text{ rad. m}^{-1} \end{array} \right.$$

**Exercice 3 : filtrage à la sortie d'un mélangeur (S1)**

1. En sortie du multiplieur, le signal vaut:

$$\begin{aligned} m(t) &= a(t)e_0(t) \\ &= 2AE_0 \cos(2\pi f_a t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ &= AE_0 \cos[2\pi(f_0 - f_a)t + \varphi_0] + \\ &\quad AE_0 \cos[2\pi(f_0 + f_a)t + \varphi_0] \end{aligned}$$

$m(t)$  est ainsi la somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquence : l'une  $f = f_0 - f_a = 30 \text{ Hz}$  et l'autre  $f' = f_0 + f_a = 2870 \text{ Hz}$ .

2. En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : on a un diviseur de tension et  $s(t) = \frac{1}{2}e(t)$ .

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, on a  $s = 0$  : c'est un **passé bas**.

3. On applique la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{R\parallel C}}{R + \underline{Z}_{R\parallel C}}$$

$$\text{avec } \underline{Z}_{R\parallel C} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{R}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

La fonction de transfert est :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

$$\text{Avec } x = \omega RC, \text{ on a } \underline{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + j\frac{1}{2}x}$$

$$4. \text{ A la pulsation de coupure } \omega_c : \underline{|H|} = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$5. \text{ Or } \underline{|H|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{RC\omega_c}{2}\right)^2}} \text{ donc } \left(\frac{RC\omega_c}{2}\right)^2 = 1 \text{ d'où } \omega_c = \frac{2}{RC}$$

6. On détermine  $f_c$  soit par la fréquence de coupure soit par intersection des asymptotes :

$$\underline{f_c = 150 \text{ Hz}} \text{ d'où } \underline{RC = 2,1 \text{ ms}}$$

7. En haute fréquence,  $\underline{H} \simeq \frac{1}{jx}$ . On reconnaît l'opérateur intégration.

La pente est  $\underline{-20 \text{ dB/dc}}$  et le déphasage tend vers  $\underline{-90^\circ}$

8. A 3 kHz, le gain est  $-3 - 11 \times 2,5 = -30,5 \text{ dB}$  donc  $H = 10^{-30,5/20} \approx 0,03$  d'où  $\underline{S' = 0,03AE_0}$

9. Et à 30 Hz le gain est  $-4 \text{ dB}$  donc  $H = 10^{-4/20} \approx 0,6$  d'où  $\underline{S = 0,6AE_0}$

On en déduit que  $S/S'$  est égal à  $0,3 / 0,06 = \underline{20}$

**Exercice 3 (S2) : accordeur de guitare**

1. Le signal oscille autour d'une valeur moyenne d'environ  $\underline{10 \text{ mV}}$ .

Le signal présente une **quasi-périodicité** : on reconnaît les mêmes formes de pics. On dénombre 3 périodes en 9,5 ms, soit  $\underline{f = 316 \text{ Hz}}$ , proche d'un **Mi aigu** (désaccordé).

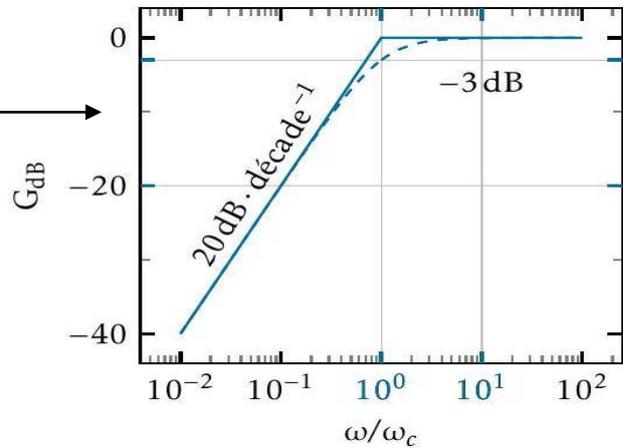
2. Un pont diviseur de tension donne

$$\underline{H_a = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}}} \text{ avec : } \underline{\omega_c = \frac{1}{R_1C_1}} \text{ (justification ci dessous)}$$

On reconnaît un passe-haut d'ordre 1.

3. Diagramme de Bode

- $\omega \ll \omega_c : \underline{H_a \approx \frac{j\omega}{\omega_c}}$ , soit  $G_{dB} = 20\log(\omega/\omega_c)$
- $\omega \gg \omega_c : \underline{H_a \approx 1}$ , soit  $G_{dB} = 0$
- $\omega = \omega_c : \underline{H_a = 1/(1 - j)}$ , soit  $|H_a| = 1/\sqrt{2}$   
(et donc  $G_{dB} = -3 \text{ dB}$ )  
c'est donc bien la pulsation de coupure.



4. On calcule  $f_c = \omega_c/(2\pi) = \underline{15,9 \text{ Hz}}$ . Cette fréquence est faible devant la fréquence fondamentale de la partie variable du signal. Celle-ci sera donc transmise à l'identique. Il en est de même des fréquences harmoniques. En revanche la valeur moyenne non-nulle déterminée à la question 1 correspond à une composante de fréquence nulle qui sera donc éliminée : le signal  $u_1$  en sortie du filtre  $F_1$  aura une valeur moyenne nulle.

5. Le gain en décibel tend vers  $-\infty$  pour  $\omega \rightarrow \pm\infty$  : il s'agit d'un filtre passes-bande. Sa fréquence de résonance est 330 Hz. Il s'agit d'un Mi aigu.

Les fréquences de coupure sont celles pour lesquelles le gain vaut -3 dB.

On lit  $\omega_{c1} = 320 \text{ Hz}$  et  $\omega_{c2} = 335 \text{ Hz}$ , soit une largeur de bande passante de 15 Hz.

6. Le filtre  $F_2$  va laisser passer le fondamental  $f_1$  qui est dans sa bande passante et atténuer fortement la composante de fréquence  $5f_2$ . Plus précisément, on lit les gains :

$$f = f_1 : G_{dB} = -6 \text{ dB, soit une amplitude de } 18\text{mV} \times 10^{-6/20} = \underline{9,0\text{mV}},$$

$$f = 5f_1 : G_{dB} = -45 \text{ dB soit une amplitude de } 26\text{mV} \times 10^{-45/20} = \underline{1,5 \cdot 10^{-1}\text{mV}}.$$

7. On lit graphiquement que le signal triangle est d'amplitude  $E = 5 \text{ V}$ . On peut alors calculer :  $\frac{8E}{\pi^2} = \underline{4\text{V}}$ . On a ensuite une décroissance en  $1/n^2$  de l'amplitude des harmoniques.

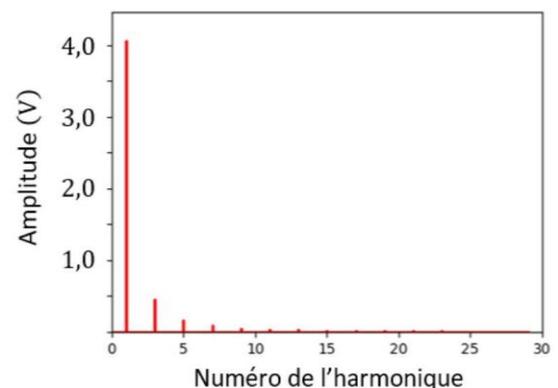
8. on peut lire graphiquement :

$$2T = 10 \times 200\mu\text{s} \Rightarrow T = 1,0 \text{ ms} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 6280 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow x = \frac{\omega}{\omega_0} = \underline{1,256}$$

En hautes fréquences, on a un filtre intégrateur :

$$\underline{H \sim \frac{H_0}{jQx} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{\omega_0 H_0}{Q} \Rightarrow s(t) = \frac{\omega_0 H_0}{Q} \int e(t) dt}$$

Puisque  $x > 1$ , tous les harmoniques de  $u_e$  sont dans la pente à  $-20 \text{ dB/dec}$  du filtre. Ce dernier se comporte donc comme un intégrateur : le signal de sortie est (proportionnel à) une primitive du signal d'entrée. Il s'agit donc d'une suite de branches de parabole, croissante puis décroissante, d'amplitude plus faible que le signal d'entrée (le coefficient de proportionnalité est inférieur à 1 car  $G_{dB} < 0$ ).



9. Par définition d'une fonction de transfert :

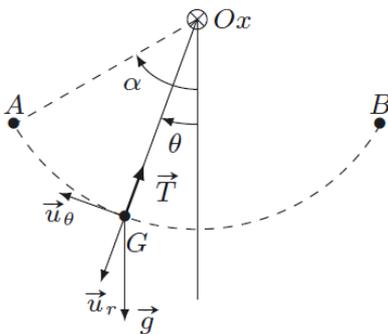
$$\underline{s} = \underline{e} \times \underline{H} \Rightarrow S_n = E_n \times H_n \text{ et } \underbrace{\phi_{s,n}}_{=phi_n} = \underbrace{\phi_{e,n}}_{=0} + \phi_{H,n}$$

Ainsi, pour le filtre d'étude :

$$S_n = -\frac{8E}{\pi^2 n^2} \times \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( nx - \frac{1}{nx} \right)^2}} \text{ et } \phi_n = -\arctan \left( Q \left( nx - \frac{1}{nx} \right) \right)$$

**Exercice 4 (S1) : quelques questions de mécanique**

1. Voir cours
2. Voir cours.



3. Tarzan est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la tension  $\vec{T}$  de la liane. La loi de la quantité de mouvement appliquée à Tarzan dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit alors :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ .

On choisit la base polaire  $(G, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$ , avec  $Ox$  dirigé vers l'arrière de la figure,  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OG}}{L}$  et  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_r$ .

La tension de la liane s'écrit alors  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  et l'accélération de Tarzan  $\vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ .

Par projection sur  $\vec{u}_r$  :  $-mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos(\theta)$

et sur  $\vec{u}_\theta$  :  $mL\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)$ , qui constitue l'équation du mouvement.

4. On multiplie l'équation du mouvement par  $\dot{\theta}$  :

$$L\ddot{\theta}\dot{\theta} = -g\sin(\theta)\dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{d(L\dot{\theta}^2)}{dt} = g \frac{d\cos(\theta)}{dt}$$

Puis on intègre entre  $t = 0$ , date à laquelle  $\theta(0) = \alpha$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ , et  $t$ .

On obtient :  $\frac{1}{2}L\dot{\theta}^2 = g(\cos(\theta) - \cos(\alpha))$

5. On réinjecte l'expression de  $L\dot{\theta}^2$  dans celle donnant  $T$ , déduite de la projection sur  $\vec{u}_r$  :

$$T(\theta) = mL\dot{\theta}^2 + mg\cos(\theta) = 3mg\cos(\theta) - 2mg\cos(\alpha)$$

La tension maximale est obtenue pour  $\theta = 0$ , et vaut  $T_{\max} = mg(3 - 2\cos(\alpha)) = 9,9 \cdot 10^2 \text{ N}$ .

Tarzan pourra donc retrouver Jane en B.

Mais arrivera-t-il à la ramener en A ?

Compte tenu de l'expression de  $\dot{\theta}^2$ , Tarzan parvient en B avec une vitesse nulle, puisque  $\theta_B = -\alpha$ . Il saisit Jane et repart sans vitesse. Le problème du retour se pose donc dans les mêmes termes qu'à l'aller. Seule la masse a changé. Elle est maintenant égale à  $(m + m')$ . La tension maximale lors du retour sera donc égale à  $T_{\max} = (m + m')g(3 - 2\cos(\alpha)) = 1,6 \cdot 10^3 \text{ N}$ . La liane résistera !

6. En orientant l'axe vertical vers le bas :  $E_{pp} = -mgz + cte$  et  $z = L\cos(\theta)$  donc  $E_{pp} = -mgL\cos(\theta) + cte$

Toutes les forces étant conservatives, l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_{pp}$  est constante

Et  $E_m(\theta) = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 - mgL\cos(\theta) + cte = E_m(\theta = -\alpha) = 0 - mgL\cos(\theta = -\alpha) + cte$

D'où :  $\frac{1}{2}mL\dot{\theta}^2 - mgL\cos(\theta) = -mgL\cos(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{2}L\dot{\theta}^2 = g(\cos(\theta) - \cos(\alpha))$