

Physique et chimie – 4h

DS avec calculatrice

Quelques recommandations de type concours

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend **12 pages** numérotées 1/12, 2/12, (...) et 12/12.
- Les candidats sont invités à porter une attention toute particulière à la **rédaction** : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Les candidats devront toujours établir une **expression littérale** avant d'effectuer toute application numérique (pas de calcul numérique intermédiaire).
- Les réponses **non justifiées** ne seront pas prises en compte.
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'**homogénéité** ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'**unité** ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Tous les résultats doivent être **encadrés**.
- Les pages de votre copie doivent être numérotées ; par exemple, pour 4 pages rendues (une copie double) : 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
- Si un candidat repère ce qui semble être une **imprécision de l'énoncé**, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutefois, si un candidat repère ce qui semble être une **erreur d'énoncé** (relation fautive, valeur numérique manquante...), il peut dans ce cas se lever et interroger le professeur surveillant.

Deux sujets sont proposés :

- **sujet S1** : il faut traiter l'exercice 1, l'exercice 2 (mais pas les 6 questions S2), l'exercice 3 (S1) et l'exercice 4 (S1) ; $8 + 17 + 9 + 6 = 40$ questions.
- **sujet S2** (plus difficile ; imposé à ceux qui ont demandé une orientation en MP* sur la fiche de vœux et facultatif pour les autres) : il faut traiter l'exercice 1, l'exercice 2 (toutes les questions) et l'exercice 3 (S2) ; $8 + 23 + 9 = 40$ questions.

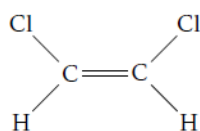
Exercice 1 : quelques questions de chimie (S1 et S2)

Le soufre

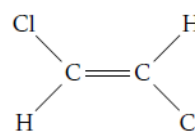
1. Déterminer les structures électroniques de O et S. Comparer leur électronégativité.
2. Donner une formule de Lewis de H_2S , SO_2 et SO_3 . Estimer les angles entre les liaisons en justifiant la réponse.
3. Pour chacune de ces molécules, déterminer l'orientation d'un éventuel moment dipolaire et le représenter.

Isomères Z et E

On considère les isomères Z et E du dichloroéthène représentés ci-dessous.



(a) isomère Z.



(b) isomère E.

4. Ces molécules sont-elles polaires ? protiques ? Justifier.
5. Justifier la différence entre leurs températures d'ébullition : $T_{eb}(Z) = 60^\circ\text{C}$ et $T_{eb}(E) = 40^\circ\text{C}$.

Le phosphore

On étudie la structure moléculaire de quelques composés du phosphore. Dans tous les cas l'atome de phosphore est central.

6. Etablir des structures de Lewis pour les composés POCl_3 et PO_4^{3-} . En déduire celle de l'acide orthophosphorique H_3PO_4 , triacide dont la base conjuguée est PO_4^{3-} .
7. Proposer une structure de Lewis pour l'acide phosphoreux H_3PO_3 sachant qu'il s'agit d'un diacide ayant la forme d'un tétraèdre dont P occupe le centre.

Ions contenant les atomes C, N et O

8. Proposer des structures de Lewis pour l'ion cyanate NCO^- et l'ion fulminate CNO^- (l'ordre d'enchaînement est celui donné par la formule). On précisera la géométrie de la molécule. Proposer une explication au fait que l'on n'observe pas l'ion CON^- ?

Exercice 2 : récupérateur d'énergie en discothèque (S1 et S2)

Cet exercice est en fait un problème constitué de plusieurs parties. S'il faut avoir lu toutes les parties dans l'ordre afin de pouvoir les comprendre, elles sont en revanche indépendantes du point de vue des résultats. Il est donc possible de répondre à des questions de la partie N sans avoir su répondre à toutes les questions de la partie N-1.

De nombreux systèmes de récupération d'énergie sont aujourd'hui utilisés pour alimenter des capteurs ou des petits dispositifs électroniques. Ces systèmes récupèrent de l'énergie de l'activité humaine, de la chaleur ambiante, de la lumière ou des vibrations. On étudie dans cette partie un système conçu et mis en œuvre par des ingénieurs néerlandais afin de récupérer de l'énergie issue de la danse, dans le contexte d'une discothèque (voir figure 1). Ce système a fait l'objet d'un brevet, publié en 2010 par l'entreprise Energy Floors[®].



Figure 1 - Club Watt, Rotterdam

La piste de danse est composée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles, convertissant une partie de l'énergie cinétique des danseurs en énergie électrique. Cette énergie est ensuite utilisée pour éclairer, entre autres, une assemblée de diodes électroluminescentes (LED) multicolores situées sur les dalles et autour de la piste de danse (voir figure 2).

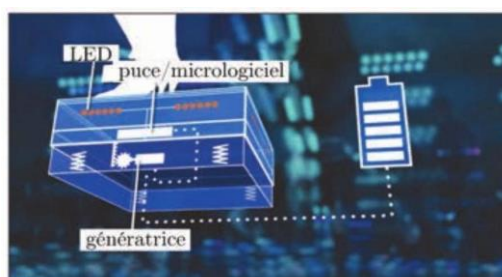


Figure 2 - Vue d'artiste du module récupérateur d'énergie

A- Mouvement de la dalle : mise en équation

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on se place à l'échelle d'un module unique, constitué d'une dalle de dimensions $65 \text{ cm} \times 65 \text{ cm} \times 14,5 \text{ cm}$ suspendue par des ressorts mécaniques. Pour simplifier, on la modélise par une masse m reliée à un ressort équivalent de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k , ainsi qu'à un amortisseur mécanique (frottement fluide) de coefficient $D > 0$ (voir figure 3). On note $\vec{g} = -g\vec{e}_x$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

La dalle est repérée par sa position x sur un axe vertical ascendant de vecteur unitaire \vec{e}_x , l'origine O étant liée au bâti. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen ; on note $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ son vecteur vitesse dans ce référentiel. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est ensuite converti en mouvement de rotation par un engrenage de type pignon-crémaillère.

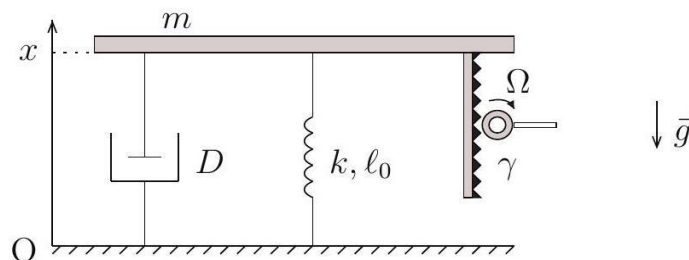


Figure 3 - Modèle mécanique de la dalle mobile : schéma et notations.

1. Exprimer la force de rappel \vec{F}_r exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.
2. La dalle étant supposée au repos dans un premier temps, déterminer sa position d'équilibre x_{eq} en fonction de ℓ_0 , k , m et g . Vérifier l'homogénéité dimensionnelle et la pertinence physique de l'expression obtenue.

Un danseur de masse M monte sur la dalle : cette dernière se met alors en mouvement, avant de se stabiliser à une nouvelle position d'équilibre x'_{eq} .

3. Exprimer littéralement x'_{eq} , puis l'affaissement de la dalle $\delta = x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}}$.

Le constructeur précise ci-dessous un critère de dimensionnement du ressort équivalent.

Document 1. Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

Although the dancer is aware that energy is generated from the dance floor, the dancing experience should only be disturbed a little. Therefore, only little movement (several millimeters) of the suspended floor is allowed, and a high spring ^a stiffness ^b has been selected to achieve this.

- a. ressort.
b. raideur.

4. En choisissant une valeur raisonnable pour M (adulte de corpulence moyenne), proposer une valeur de constante de raideur permettant de répondre en régime quasi-statique à la contrainte imposée.

On cherche à présent à décrire la dynamique du mouvement de la dalle. Outre son poids, la force de rappel du ressort et la force exercée par l'amortisseur mécanique, la dalle subit également :

- une force exercée par le danseur en mouvement, notée \vec{F} ;
- une force d'amortissement électromagnétique $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$, avec $\alpha > 0$; on justifiera son expression dans la partie suivante.

5. Après avoir posé $X = x - x_{eq}$, montrer que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme

$$\ddot{X} + \left(\frac{D + \alpha}{m}\right)\dot{X} + a_0X = b_0$$

où on donnera les expressions de a_0 et b_0 en fonction de k, m et F .

B- Puissance électrique reçue par les LED

Le mouvement de translation de la dalle, de vitesse $\dot{x}(t)$, entraîne la rotation de la roue dentée schématisée sur la figure 3. On admet que sa vitesse angulaire de rotation s'exprime $\Omega = \gamma\dot{x}(t)$, avec γ le rapport de transmission. L'énergie cinétique de la roue dentée est par la suite convertie en énergie électrique au moyen d'une génératrice, servant alors à éclairer un réseau de LED disposées sur la partie supérieure des dalles.

On modélise dans un premier temps la génératrice par l'association série d'une tension u appelée force électromotrice (fem) $u = K_t\Omega$, d'une résistance R et d'une inductance propre L . On s'intéresse à la puissance débitée par ce dipôle dans le réseau de LED, assimilé à une résistance de charge R_L (voir figure 4).

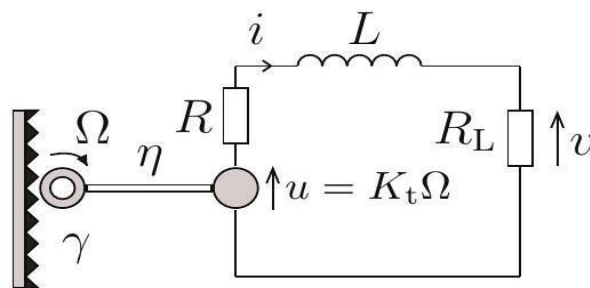


Figure 4 - Circuit électrique équivalent : schéma et notations.

6. La pulsation ω étant celle imposée par les pas du danseur, estimer son ordre de grandeur.

7. Sachant que $R = 19,2 \Omega$, justifier l'approximation proposée ci-dessous par le constructeur.

Document 2. Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

As such, the armature winding inductance ($L = 1,67 \text{ mH}$) has been neglected because of the low excitation frequency of the system.

8. Dans le cadre de l'approximation précédente où on néglige l'effet de la bobine, exprimer la tension v aux bornes de la résistance R_L en fonction de u, R et R_L .

9. Dédire de la question précédente que la puissance électrique instantanée $P_L(t)$ reçue par le réseau de LED peut s'écrire

$$P_L(t) = A[K_t\gamma\dot{x}(t)]^2$$

avec A un facteur à exprimer en fonction de R et R_L uniquement.

La génératrice concède des pertes au cours de son fonctionnement. Son rendement est défini par

$$\eta = \frac{P_u(t)}{P_p(t)} \quad (0 < \eta < 1)$$

où $P_u(t)$ et $P_p(t)$ désignent respectivement la puissance instantanée fournie par la fem et la puissance instantanée prélevée par la génératrice à la dalle mobile.

10. Exprimer $P_u(t)$, puis $P_p(t)$ en fonction de $K_t, \gamma, R, R_L, \dot{x}(t)$ et η .

11. (S2) Justifier de manière argumentée que la puissance P_p prélevée se traduit, d'un point de vue de la dalle, par une force de frottement de la forme $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$ (voir première partie), avec

$$\alpha = \frac{(K_t\gamma)^2}{\eta(R + R_L)}$$

12. (S2) On donne $\eta = 50\%$, $K_t = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

En prenant $R_L = 150 \Omega$ et $\gamma = 2,2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$, calculer la valeur de α .

Sachant que $D = 10 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$, justifier le commentaire du constructeur reporté ci-dessous.

Document 3. Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

When energy is generated for lighting, the damping α of the system is determined by the dc generator and its electrical load. In that case, the mechanical damping may be neglected.

a. amortissement.

C- Réponse indicielle

Durant les phases de conception du dispositif, des simulations numériques ont été réalisées dans le but d'optimiser la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique, tout en respectant les exigences de puissance et de sécurité.

Dans cette partie, on impose à la dalle, initialement à sa position d'équilibre et immobile, un échelon de force $F = F_0$ à partir de l'instant $t = 0$, et on cherche à quantifier la puissance fournie au réseau de LED. En utilisant les parties précédentes, l'équation du mouvement de la dalle peut être approchée par :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \frac{F_0}{k}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ et où $X = x - x_{\text{eq}}$

On donne la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35 \text{ kg}$, $k = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. On prendra numériquement $\alpha = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

Compte tenu des ordres de grandeur, on admet que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire de façon approchée :

$$X(t) \simeq \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{1}{1 - Q^2} (e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\omega_0 t / Q}) \right]$$

13. Montrer que dans le cadre du modèle développé, la puissance électrique instantanée reçue par les LED s'écrit sous la forme

$$P_L(t) = K F_0^2 (e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q})^2$$

avec K un facteur constant à déterminer.

14. (S2) Dans l'expression de $P_L(t)$, une exponentielle converge (beaucoup) plus vite que l'autre : déterminer laquelle. Montrer alors qu'aux « temps longs », $P_L(t)$ décroît exponentiellement, selon un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de ω_0 et Q .

La figure 5, adaptée de la notice constructeur, représente l'évolution de la puissance électrique prédite (signal de sortie ; en pointillés sur la figure ci-dessous) sous l'effet de plusieurs échelons de force successifs d'intensité différente (signal d'entrée ; en trait plein sur la figure ci-dessous).

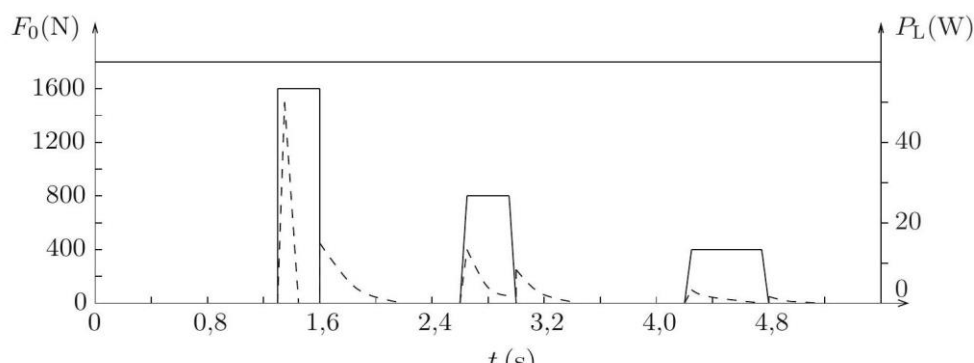


Figure 5 - Évolutions temporelles de la force et de la puissance électrique : simulations numériques

Le constructeur apporte ci-dessous des précisions.

Document 4. Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

Energy is both generated when the tile ^a moves downward due to the force applied by the dancer and when the tile moves upward due to the spring even when there is no contact with the dancer.

a. dalle.

15. (S2) Proposer une explication au phénomène observé et décrit ci-dessus. En quoi ce commentaire est-il en cohérence avec la figure 6 ?

D- Forçage sinusoïdal

On teste à présent le système au plus proche de ses conditions réelles d'utilisation. Un expérimentateur danse sur la dalle et exerce sur elle une force \vec{F} , dont la norme est mesurée au moyen d'un capteur de force placé sur celle-ci (voir figure 6). Le signal obtenu montre qu'en dansant, l'expérimentateur reste à tout instant en contact avec la dalle. On modélise ce signal de manière approximative par l'équation

$$F(t) = F_0 + F_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

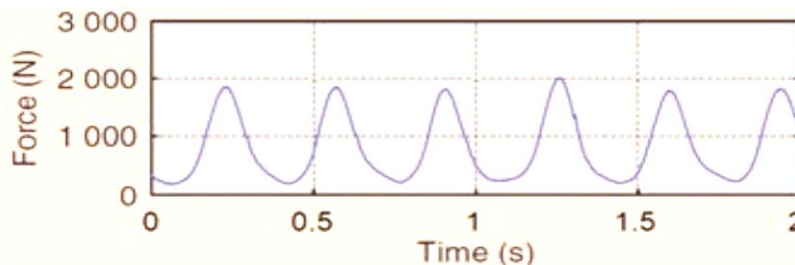


Figure 6 - Évolution expérimentale de la force F exercée par le danseur (de masse 83 kg) sur la dalle au cours du temps (Energy Floors[®]).

16. Estimer la valeur des coefficients de modélisation F_0, F_1 et ω pour le signal représenté sur la figure 6. En redéfinissant X comme l'écart entre la position de la dalle et sa position d'équilibre atteinte lorsque le danseur est immobile, l'équation du mouvement de la dalle peut s'écrire

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_1}{m} \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\eta(R + R_L)\sqrt{km}}{(K_t\gamma)^2}$

On rappelle la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35 \text{ kg}, k = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. En régime établi, la solution de cette équation différentielle est de la forme

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \Psi)$$

On lui associe la grandeur complexe $\underline{X}(t) = X_0 e^{i(\omega t + \Psi)}$ telle que $X(t) = \text{Re}(\underline{X}(t))$.

17. Déterminer l'expression de l'amplitude X_0 des oscillations de la dalle en fonction de ω_0, Q, m, ω et F_1 .

18. Exprimer l'amplitude de vitesse V_0 de la dalle en fonction de X_0 et ω .

En utilisant les résultats des parties précédentes, il est possible de montrer (non demandé) que la moyenne temporelle de la puissance fournie aux LED s'exprime

$$\langle P_L \rangle = \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2K_t^4 \gamma^4 + 2\eta^2 km(R + R_L)^2 [(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega)]^2}$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'influence de l'un des paramètres suivants, ω , γ ou R_L , sur la puissance moyenne récupérée $\langle P_L \rangle$, les autres paramètres étant maintenus constants.

19. Analyser les comportements asymptotiques de $\langle P_L \rangle$ aux basses et aux hautes fréquences.

20. Déterminer, littéralement puis numériquement, la pulsation ω pour laquelle $\langle P_L \rangle$ est maximale, ainsi que l'expression littérale de la puissance moyenne récupérée maximale notée $\langle P_L \rangle_{\max}$. Tracer alors l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de ω .

Ce système a été testé en 2015 dans l'émission scientifique télévisée On n'est pas que des cobayes, à l'occasion de la Fête de la Science. Deux équipes, composées chacune de deux danseurs et deux danseuses, s'affrontent sur la piste de danse, avec pour objectif de générer le maximum d'énergie électrique pendant une durée fixée (30 secondes environ) :

- l'équipe 1 danse sur un morceau de salsa, de tempo 115 battements $\cdot \text{min}^{-1}$;
- l'équipe 2 danse sur un morceau de disco, de tempo 125 battements $\cdot \text{min}^{-1}$.

21. En faisant l'hypothèse que les deux équipes ont même masse totale et dansent de la même façon, quelle équipe a selon vous gagné ce duel, en vous fiant aux résultats établis à la question précédente ? Justifier.

Dans les questions suivantes, on considère que la pulsation ω imposée par le danseur est fixée. Le graphique 3D ci-dessous, fourni par le constructeur, montre que la puissance de sortie dépend fortement du rapport de transmission γ et de la résistance de charge R_L .

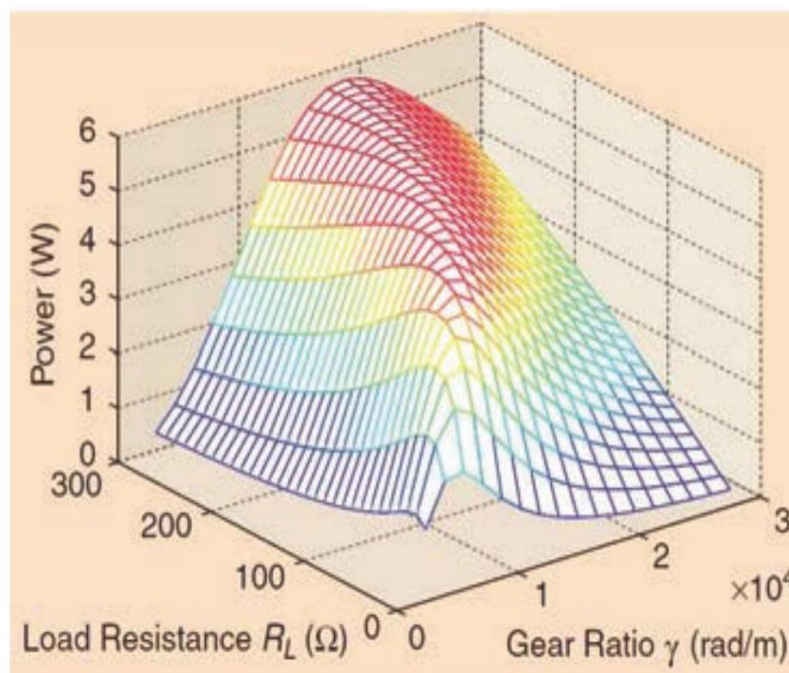


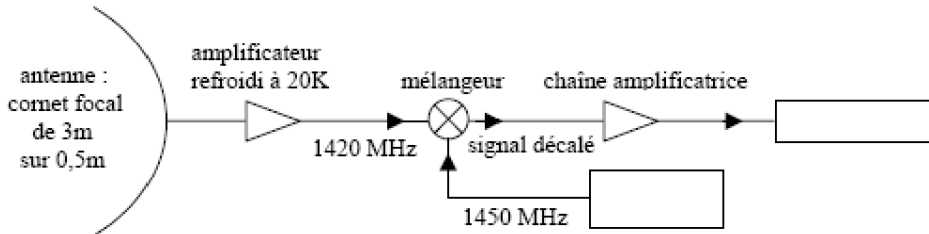
Figure 6 - Évolution de la puissance électrique de sortie en fonction du rapport de transmission et de la résistance de charge (Energy Floors[®]).

22. **(S2)** Expliquer en quoi le graphe 3D de la figure 6 est cohérent avec les évolutions de $\langle P_L \rangle$ en fonction de γ (à ω et R_L étant fixés) et de $\langle P_L \rangle$ en fonction de R_L (à ω et γ étant fixés) déduites de l'expression de $\langle P_L \rangle$ de la page précédente.

23. **(S2)** Quel jeu de valeurs (γ , R_L) proposeriez-vous pour dimensionner le système étudié ?

Exercice 3 (S1) : filtrage à la sortie d'un mélangeur

Inauguré en 1965, le radiotélescope de Nançay a été créé pour étudier le décalage Doppler de la raie 21 cm de l'atome d'hydrogène due au couplage spin nucléaire- spin électronique. C'est un moyen privilégié d'étude de la cinématique de l'hydrogène interstellaire, et donc des mouvements dans l'univers. De 1956 à 1967, de nombreux chercheurs ont travaillé à la très délicate mise au point.



On se propose de reproduire simplement le principe d'un mélangeur en se plaçant 6 décades plus bas en fréquence.

Donnée : $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Dédoublément de fréquence

On a deux tensions :

$$a(t) = A\sqrt{2}\cos(2\pi f_a t) \text{ avec } f_a = 1420 \text{ Hz}$$

$$e_0(t) = E_0\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 + \varphi_0) \text{ avec } f_0 = 1450 \text{ Hz}$$

Ces tensions sont mises aux entrées d'un multiplieur ; on obtient en sortie une tension :

$$m(t) = a(t) \cdot e_0(t)$$

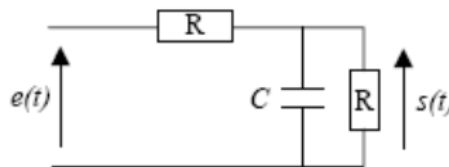
1. Démontrer que $m(t)$ est la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquence f et $f' > f$:

$$m(t) = M[\cos(2\pi f t + \varphi_0) + \cos(2\pi f' t + \varphi_0)]$$

Calculer numériquement f et f' .

Filtrage

On utilise le filtre suivant :



2. Déterminer sans calcul la nature de ce filtre.

3. Prouver que la fonction de transfert de ce filtre est $H(\omega) = \frac{1}{2+jRC\omega}$

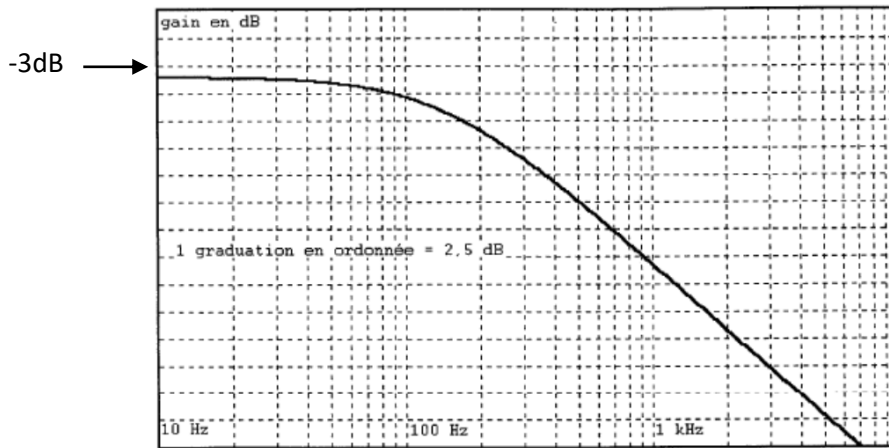
4. Définir la pulsation de coupure ω_c

5. Prouver que $\omega_c = \frac{2}{RC}$

6. On a tracé à la page suivante le diagramme de Bode en gain de ce filtre. Après avoir déterminé graphiquement la fréquence de coupure f_c , en déduire un ordre de grandeur du produit RC .

7. Démontrer la valeur de la pente de l'asymptote à haute fréquence.

Vers quelle valeur tend alors le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$?



Le mélangeur

On place à l'entrée de ce filtre le signal $m(t)$. La sortie est alors :

$$s(t) = S \cos(2\pi f t + \varphi_S) + S' \cos(2\pi f' t + \varphi_{S'})$$

8. A partir du diagramme de Bode, déterminer l'expression de S' sous la forme kAE_0 en déterminant la valeur numérique de k .

9. A l'aide d'un raisonnement analogue, en déduire le rapport S/S' .

Exercice 3 (S2) : accordeur de guitare

On étudie quelques aspects du fonctionnement d'un accordeur de guitare. Il s'agit d'un appareil permettant de régler la tension des six cordes pour que leurs fréquences fondamentales de vibration soient celles du tableau ci-après.

Corde	Fréquence f_{ac} (Hz)
Mi grave	82,4
La	110
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aigu	329,6

On note f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde étudiée, initialement légèrement différente de la bonne fréquence f_{ac} (fréquence accordée). On s'intéresse au traitement du signal électrique produit par la vibration de la corde dont on considère qu'il reproduit fidèlement ses vibrations mécaniques.

Filtrage du signal

La figure 1 présente un exemple de ce signal électrique, noté $u_e(t)$.

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal ainsi qu'une estimation de la valeur de sa fréquence fondamentale (en admettant que le signal est approximativement périodique). En déduire de quelle corde il s'agit.

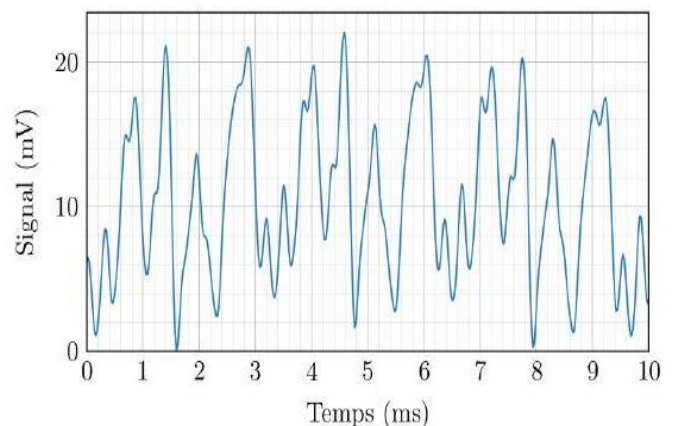


Fig. 1 : Signal u_e de la guitare

Le signal électrique u_e de la figure 1 est envoyé sur le filtre de la figure 2 (filtre F_1).

2. En supposant l'entrée sinusoïdale, établir l'expression de la fonction de transfert, noté $\underline{H}_a(j\omega)$ en fonction de R_1, C_1 et ω puis en fonction de ω et de la pulsation de coupure ω_c en justifiant l'expression de ω_c .

3. Tracer en le justifiant l'allure du diagramme de Bode G_{dB} en fonction de ω en échelle logarithmique.

4. Pour $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$, calculer la fréquence de coupure à -3 dB de ce filtre. Quel sera son effet sur le signal de la figure 1 ? On précisera entre autres l'effet sur la fréquence fondamentale.

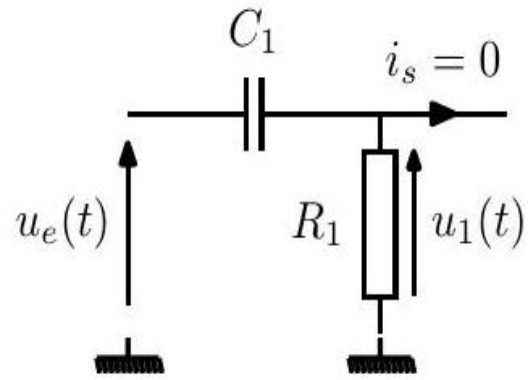
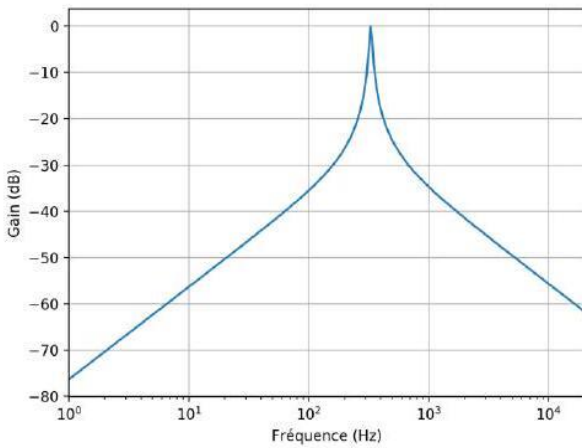


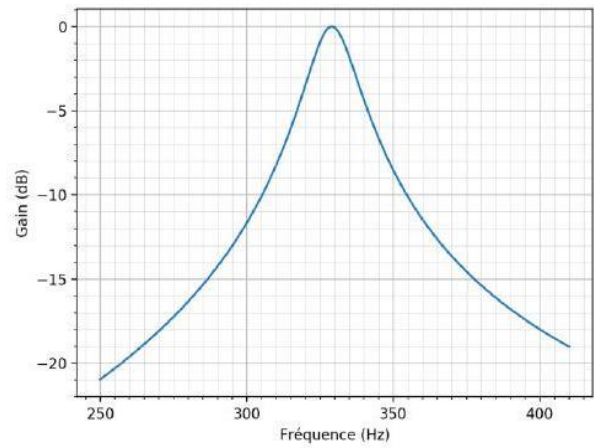
Fig. 2 : filtre (F_1)

Étude spectrale

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_1 obtenu en sortie du filtre F_1 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence f_{ac} . On utilise pour cela le filtre F_2 dont le diagramme de Bode du gain est représenté sur la figure 3 à deux échelles différentes. Il possède une fréquence caractéristique, qu'on choisit égale à f_c et dont on pourra ultérieurement faire varier la valeur.



(a)



(b)

Fig. 3 : Diagramme de Bode du filtre F_2

5. Déterminer la nature du filtre. Quelle est sa fréquence caractéristique ? À quelle note correspond-elle ? Déterminer de plus la largeur de sa bande passante.

La figure 4 représente le spectre du signal u_e de la figure 1 (on admettra que la fréquence fondamentale est 315 Hz).

6. Décrire le spectre du signal en sortie du filtre F_2 quand on lui applique le signal u_1 obtenu en sortie du filtre F_1 (il faudrait en fait ajouter un montage suiveur intercalé entre les deux filtres afin de conserver la fonction de transfert \underline{H}_1).

On calculera les amplitudes de la composante spectrale de fréquence f_1 et de celle de fréquence $5f_1$.

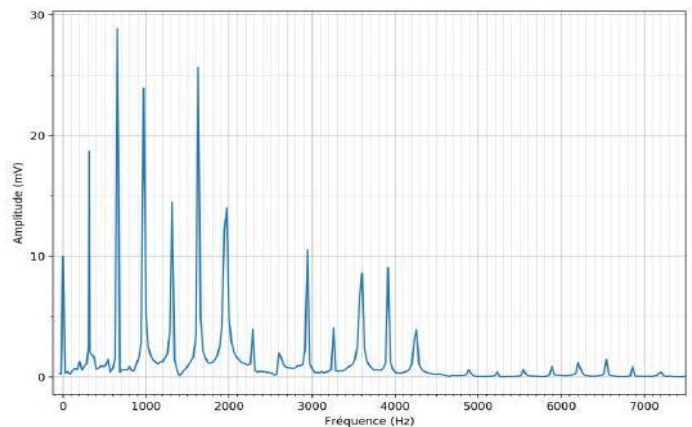


Fig. 4 : Spectre du signal u_e de la figure 1

Filtre accordable

On cherche à réaliser un filtre F_2 dont la fréquence soit réglable en changeant la valeur d'une résistance. On utilise pour cela le montage ci-contre.

La fonction de transfert notée \underline{H}_2 de ce filtre est égale à

$$\underline{H}_2 = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec $H_0 = \frac{1}{1+R/R'+C'/C}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{RR'CC'}} = 5000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $Q = \frac{\sqrt{RC'/R'C}}{1+R/R'+C'/C}$

Il est possible de jouer sur les valeurs des composants afin d'ajuster la fréquence de résonance du filtre accordable à la fréquence de la corde (questions supprimées...).

Le diagramme de Bode du filtre accordable est fourni ci-dessous.

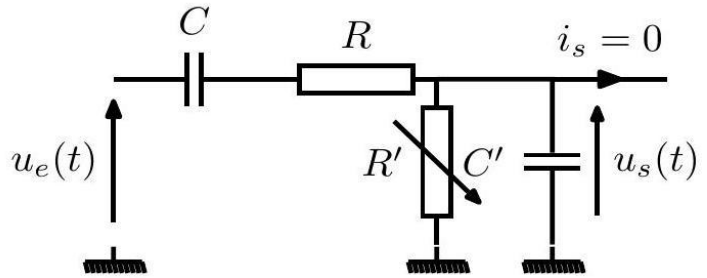


Fig. 5 : filtre F_2

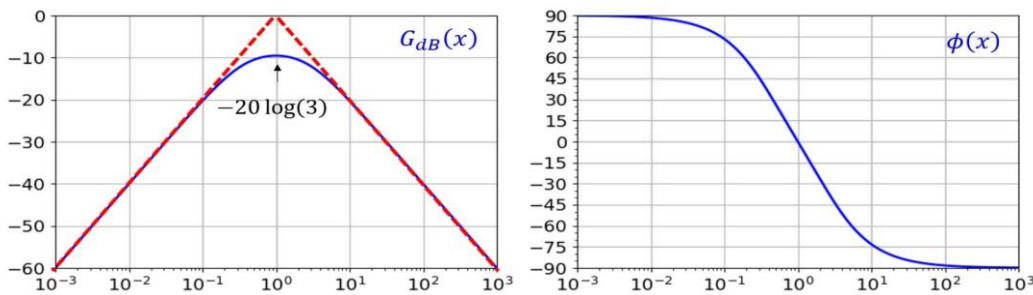
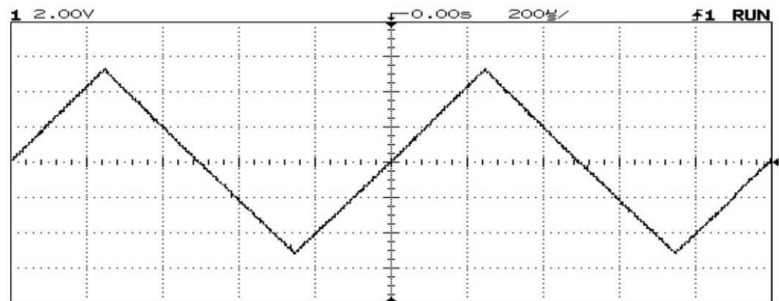


Fig. 6 : diagramme de Bode du filtre accordable

On applique maintenant un signal triangulaire $u_e(t)$, de pulsation ω et d'amplitude E représenté sur la figure ci-dessous.



Echelle verticale :
2V/division

Echelle horizontale :
200 µs/division

Fig. 6 : signal triangulaire $u_e(t)$

Le signal d'entrée $u_e(t)$ est décomposable en série de Fourier et s'écrit sous la forme :

$$u_e(t) = -\frac{8E}{\pi^2} \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} \frac{\cos(n\omega t)}{n^2}$$

où $2\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des entiers naturels impairs.

7. Tracer l'allure du spectre en amplitude du signal $u_e(t)$ en précisant l'amplitude correspondant à la première fréquence de la décomposition en série de Fourier.

8. Calculer numériquement la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ puis en déduire l'allure du signal de sortie correspondant $u_s(t)$. Justifier après avoir étudié le comportement du filtre.

9. Mettre le signal de sortie $u_s(t)$ sous la forme d'une série de Fourier :

$$u_s(t) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} S_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

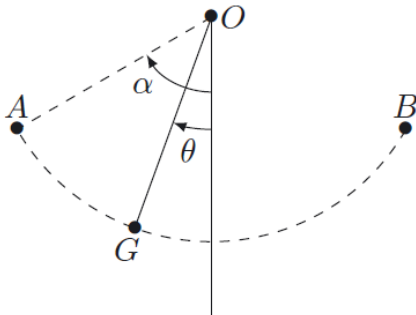
Préciser pour l'harmonique de rang n l'expression de l'amplitude S_n et la phase à l'origine ϕ_n .

Exercice 4 (S1) : quelques questions de mécanique

Démonstrations de cours

- Rappeler l'énoncé du théorème de la puissance cinétique puis en déduire (par une démonstration) le théorème de la puissance mécanique.
- Après avoir défini la base polaire, déterminer l'expression de l'accélération dans cette base, dans le cas d'un mouvement circulaire.

Mécanique en base polaire



La liane a été popularisée au cinéma comme moyen de locomotion très apprécié de Tarzan. Afin de retrouver Jane, celui-ci saisit l'extrémité d'une liane et se laisse penduler jusqu'à sa bien-aimée.

La position du centre de masse G de Tarzan est repérée par l'angle θ . Sa position initiale est notée A et est repérée par l'angle $\alpha = 30^\circ$. Jane se situe au point B défini par $\theta_B = -\alpha$. La masse de Tarzan, peau de bête comprise, est $m = 80$ kg, celle de Jane est $m' = 50$ kg. La longueur de la liane est $OG = L = 10$ m et sa masse est négligée.

Nous négligeons tout frottement et prenons pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La trajectoire prévue de G est dessinée en pointillés.

La liane utilisée par Tarzan est usée et ne pourra résister à des tensions supérieures à 2,0 kN. Le but de cet exercice est de déterminer si Tarzan pourra retrouver Jane puis la ramener en A .

- Appliquer la deuxième loi de Newton à Tarzan dans le référentiel terrestre afin d'obtenir deux relations, l'une correspondant à l'équation du mouvement de Tarzan et l'autre renseignant sur la norme T de la tension de la corde.
- Intégrer l'équation du mouvement après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$ pour obtenir une relation liant $\dot{\theta}^2, \theta$ et les données de l'énoncé.
- En déduire une expression de la tension de la corde en fonction de θ et des données de l'exercice. Conclure.
- Après avoir justifié que l'énergie potentielle du système est égale à $E_{pp} = \mp mgL \cos(\theta) + cte$ (en précisant si le signe est + ou -), retrouver la relation établie à la question 4.