

Physique et chimie – 4h

DS avec calculatrice

Quelques recommandations de type concours

- **Les téléphones et les montres connectées** doivent être déposés dans le sac et le sac doit être déposé à l'avant de la salle (vers le tableau) ou à l'arrière.
- Si un candidat repère ce qui semble être une **imprécision de l'énoncé**, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutefois, si un candidat repère ce qui semble être une **erreur d'énoncé** (relation fausse, valeur numérique manquante...), il peut dans ce cas se lever et interroger le professeur surveillant.

Deux sujets sont proposés :

- **sujet S1** : il faut traiter les questions de cours, l'exercice 1, l'exercice 2 (sauf les questions 2 et 3), l'exercice 3 (S1), l'exercice 4 et l'exercice 5 (questions S1) ; $3 + 8 + 6 + 6 + 8 + 9 = 40$ questions.
- **sujet S2** (plus difficile ; imposé à ceux qui souhaitent aller en MP* et facultatif pour les autres) : il faut traiter l'exercice 1 (sauf les questions 3 et 5), l'exercice 2 (toutes les questions), l'exercice 3' (S2), l'exercice 4 et l'exercice 5 (questions S2) ; $6 + 8 + 9 + 8 + 9 = 40$ questions.

Questions de cours sur les forces centrales (S1)

1. Soit un système de masse m en orbite circulaire rasante autour de la Terre de masse M_T et de rayon R_T . Démontrer l'expression de la vitesse v_{lib} de libération du système lui permettant d'échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre.
2. Soit un système ponctuel de masse m soumis à une force centrale dont le point caractéristique est O . Après avoir défini une force centrale, démontrer que le mouvement est plan et préciser le plan de la trajectoire.
3. Soit un satellite de masse m en orbite elliptique autour de la Terre de masse M_T . On note r la distance entre le centre de la Terre et le satellite supposé ponctuel. Prouver que l'énergie mécanique du satellite peut s'écrire sous la forme $E_{\text{méca}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r)$ et préciser l'expression de $E_{p \text{ eff}}(r)$.

Exercice 1 : Expériences réalisées par J.J. Thomson (S1 et S2)

Joseph John Thomson (1856-1940) est un physicien britannique. Il a entre autres découvert les isotopes et a inventé la spectrométrie de masse. Il a aussi analysé la propagation d'ondes guidées. Il a reçu le prix Nobel de physique de 1906 pour « ses recherches théoriques et expérimentales sur la conductivité électrique dans les gaz ».

On s'intéresse ici à ses recherches ayant fournies en 1897 les preuves expérimentales de l'existence de l'électron qui avait été prédite par George Johnstone Stoney en 1874. Elles portaient sur les « rayons cathodiques » produits à l'intérieur d'une ampoule de verre contenant de l'air raréfié, entre une cathode et une anode entre lesquelles était imposée une forte différence de potentiel. Les expériences de Jean Perrin, en France, montrent que ces rayons transportent une charge négative.



Thomson réalise une première expérience où les rayons sont déviés par un champ magnétique, ce qui lui permet de vérifier que la charge électrique transportée par ces rayons ne peut pas en être séparée.

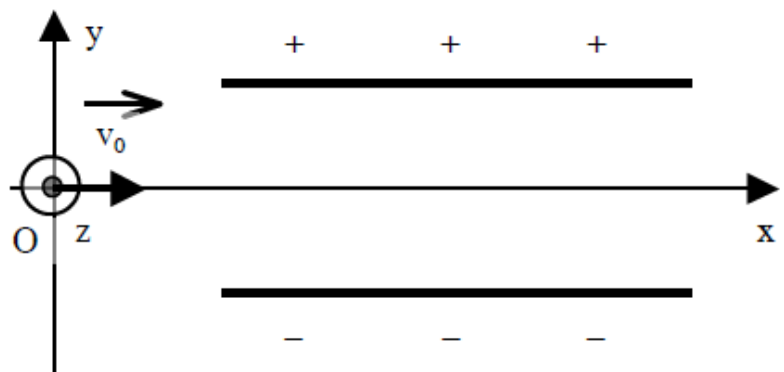
Une deuxième expérience lui permet de montrer que les rayons cathodiques peuvent être déviés par un champ électrique, à l'instar des autres charges.

Dans une troisième expérience, Thomson détermine la charge massique e/m des particules, rapport de la charge à la masse, en mesurant la déviation des rayons sous l'influence d'un champ magnétique.

Thomson arrive alors à une conclusion audacieuse : les rayons cathodiques sont composés de « corpuscules » qui proviennent de l'intérieur des atomes des électrodes, ce qui implique que les atomes sont divisibles. Le « corpuscule » découvert par Thomson est l'électron déjà prévu par Stoney.

1 Détermination du signe de la charge des particules (S1 et S2)

On considère le dispositif schématisé ci-contre constitué d'une cathode, d'une anode et de deux plaques métalliques formant un condensateur plan, la plaque supérieure étant chargée positivement et celle du bas négativement. L'ensemble est placé dans une ampoule de verre permettant de réaliser un vide poussé. On travaillera dans le repère cartésien (O, x, y, z) . Le faisceau entrant dans le condensateur est porté par l'axe Ox . On supposera le modèle du condensateur plan « infini » valable.



1. On observe une déviation des particules vers les valeurs de $y > 0$. Représenter sur un schéma le vecteur champ électrique ainsi que la trajectoire. Préciser le signe de la charge des particules.

2 Détermination de la charge massique des particules (S1 et S2)

Le champ électrique est maintenant supprimé et l'on met en place un champ magnétique uniforme et stationnaire : $\vec{B} = B\vec{e}_z$

2. Prouver que la trajectoire est circulaire et établir, en détaillant précisément toutes les étapes, l'expression du rayon R du cercle en fonction de la vitesse initiale v_0 des particules, de leur masse m , de leur charge en valeur absolue e , et de B .

3. (S1) Représenter la trajectoire observée en justifiant le sens de la déviation.

4. La vitesse initiale v_0 des particules est obtenue en appliquant une différence de potentiel U entre la cathode et l'anode. Etablir une relation entre v_0 , U , m et e (on supposera les particules quasiment sans vitesse initiale au voisinage de la cathode).

5. (S1) On mesure $R = 20$ cm. En déduire si les particules sont des électrons ou des anti-protons (de même masse que le proton mais de charge opposée).

Application numérique : $U = 2,0 \cdot 10^3$ V ; $B = 7,5 \cdot 10^{-4}$ T ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

3 Filtre de vitesse (S1 et S2)

6. Les calculs de la partie 2 ont montré que les résultats dépendent de la vitesse initiale des particules qui n'est pas forcément connue avec précision. Thomson imagina alors le dispositif suivant : un faisceau d'électrons que l'on suppose monocinétiques (ou homocinétiques = de même vitesse) de vitesse v_0 (inconnue) arrive dans une zone où règnent simultanément un champ

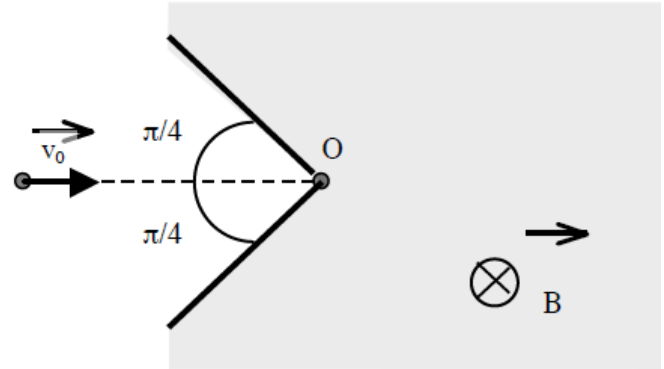
électrique et un champ magnétique. On fixe la valeur B du champ magnétique et on fait varier le champ électrique E jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de déviation du faisceau. Schématiser les directions et les sens des champs pour que ce résultat soit possible et montrer que l'on peut en déduire la valeur v_0 de la vitesse des particules en fonction de E et B .

7. Expliquer alors comment la mise en place d'une fente permet de trier les particules de vitesse v_0 des autres particules de vitesses différentes.

4 Miroir magnétique

On imagine le dispositif ci-dessous où un électron de vitesse initiale v_0 pénètre en O dans la zone grisée où règne un champ magnétique B uniforme et stationnaire orthogonal au plan de la figure (remarque : les 2 traits en gras issus de O ne sont pas des frontières infranchissables, ce sont juste les frontières délimitant la zone où règne le champ B).

8. Tracer la trajectoire (on ne demande pas de calculs) en précisant le sens de parcours et justifier le titre de la question.

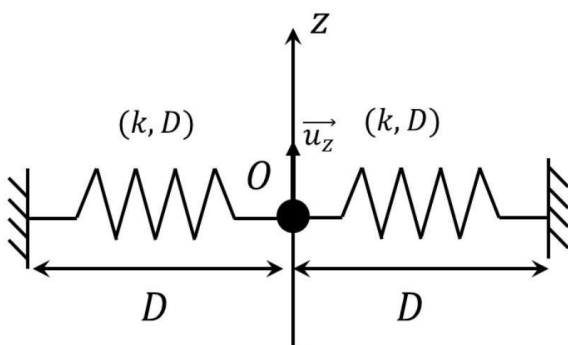


Exercice 2 : étude des oscillations d'un trampoline (S1 et S2)

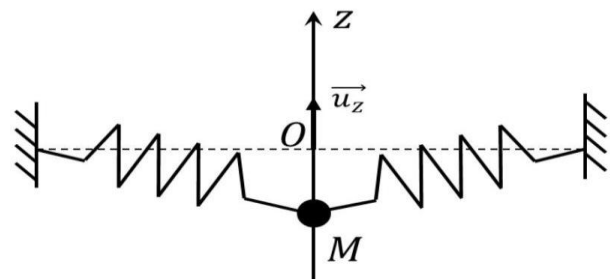
On souhaite étudier le mouvement d'un gymnaste sur un trampoline. Un trampoline est une surface élastique déformable sur laquelle le gymnaste saute, ce qui lui permet de rebondir.

1 Énergie potentielle (S1 et S2)

On assimile le gymnaste à un point matériel M de masse m . On définit un axe vertical ascendant (Oz), avec O le centre du trampoline lorsque celui-ci est au repos (figure ci-dessous à gauche), et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire associé à cet axe. On suppose que le gymnaste ne se déplace que selon la verticale, si bien que $\vec{OM} = z\vec{u}_z$. Le trampoline n'agit sur le gymnaste que lorsque $z < 0$ et son action est alors modélisée par deux ressorts transversaux de constantes de raideur k qui se déforment lorsque le gymnaste s'enfonce dans le trampoline (comme le montre la figure ci-dessous à droite). La longueur à vide de ces deux ressorts est la distance D , correspondant à la longueur des ressorts lorsque la surface est au repos. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On néglige tous les frottements.



Trampoline au repos (en l'absence du gymnaste)



Trampoline tendu (en présence du gymnaste)

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel d'un ressort de longueur ℓ , de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k s'écrit $E_{p1} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ lorsque l'origine de cette énergie potentielle est prise pour $\ell = \ell_0$.

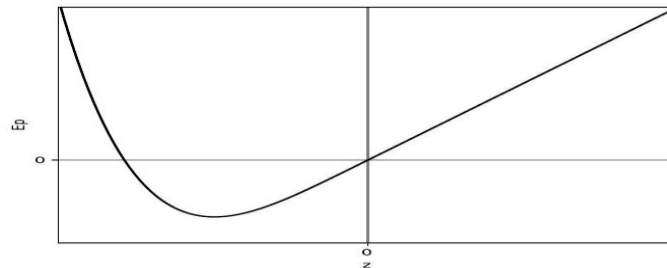
2. (S2) En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(z)$ due aux deux ressorts en fonction de k, D et z .

3. (S2) On suppose de petites déformations de la surface du trampoline : $|z| \ll D$. Montrer que sous cette hypothèse (à l'aide d'un développement limité) :

$$E_{pe}(z) = \frac{kz^4}{4D^2}$$

4. Après avoir rappelé l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} et en se servant de l'expression de l'énergie potentielle E_{pe} du trampoline (question 3), exprimer l'énergie potentielle totale $E_{p, \text{tot}}(z)$ du gymnaste. On distinguera les cas $z \geq 0$ (où le gymnaste décolle du trampoline) et $z < 0$. L'origine de l'énergie potentielle totale sera prise au point O .

L'allure de $E_{p, \text{tot}}$ en fonction de z étant représentée ci-dessous, commenter la différence entre le mouvement observé dans le cas d'une énergie mécanique 0 et dans le cas $E_m < 0$.



2 Étude du mouvement (S1 et S2)

5. Déduire de la question 4, l'expression de la force verticale résultante $\vec{F} = F_z \vec{u}_z$ qui s'exerce sur le gymnaste pour $z \geq 0$ et pour $z < 0$.

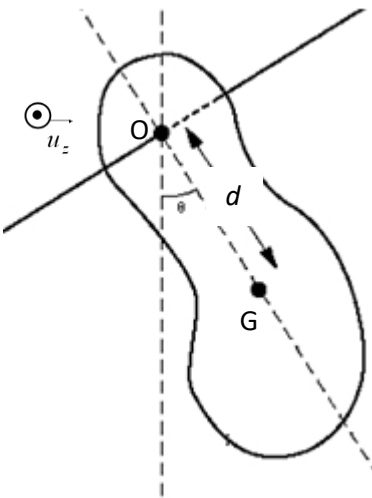
6. Établir l'équation du mouvement du gymnaste lorsque celui-ci reste en contact avec le trampoline. Commenter.

7. Déterminer l'expression de la position d'équilibre z_{eq} . Cette position est-elle stable ou instable ? Un calcul est attendu.

8. Quelle est, en fonction des données, la période T des oscillations sinusoïdales du gymnaste au voisinage de la position d'équilibre z_{eq} ? Ce résultat devra être déduit de l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre.

Exercice 3 : Loi du moment cinétique appliquée à la marche (S1)

1 Le pendule pesant (S1)



Nous considérons le cas d'un pendule pesant (de masse m , de volume V et de moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) , noté $J_{(Oz)} = J_\Delta$) tournant autour d'un axe horizontal (Oz) . On supposera que la liaison pivot au niveau de l'axe est parfaite.

Le solide est de plus plongé dans un fluide de masse volumique ρ_{fl} .

La distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du pendule est $OG = d$.

1- Établir l'équation différentielle du mouvement en tenant compte de la poussée d'Archimède (vous pouvez poursuivre même si vous ne tenez pas compte de la poussée d'Archimède, négligée par la suite...).

2- Prouver que, dans le cas des oscillations de faible amplitude, il y a isochronisme des oscillations ; et déterminer l'expression de la période T des oscillations de faible amplitude.

2 Marcher avec des échasses (S1)

La pousse d'Archimède sera négligée dans cette partie dans laquelle le solide est dans l'air.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en figure 1. Les schémas en figures 2a et 2b précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

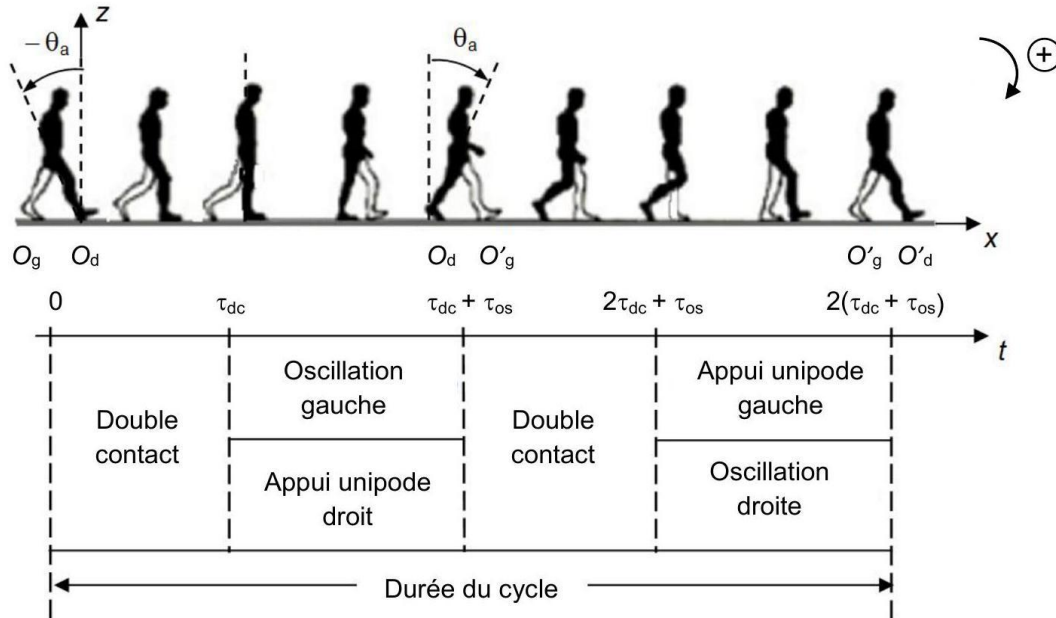


Figure 1 - Phases du cycle de la marche

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

Toutes les rotations autour d'un axe seront considérées comme des liaisons pivots parfaites.

Phase de double contact

À la date $t = 0$, la jambe droite prend appui sur le sol, en O_d (elle vient de terminer son oscillation) (figures 1 et 2a) ; elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle : $\Omega(0) = 0$) et se trouve inclinée d'un angle $\theta = -\theta_a$ par rapport à la verticale ascendante $O_d z$. Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$ autour de l'axe $O_d y$ perpendiculaire au plan de figure ($xO_d z$), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en O_g , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée τ_{dc} , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date $t = \tau_{dc}$, la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

Phase d'oscillation gauche

À partir de la date $t = \tau_{dc}$ et jusqu'à la date $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$, la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée τ_{os} autour de l'axe de son pivot fémoral $F_g y$ (figure 2b) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de $O_d y$ jusqu'à la position $\theta = \theta_a$ représentée en pointillés sur la figure 2a).

Appuis au sol et définition du pas

Après son appui au sol au point O_g , la jambe gauche reprend appui au sol en O'_g , à la distance $2p$ devant O_g et à la distance p devant O_d : $p = O_g O_d = O_d O'_g$ définit le pas de la marche.

Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

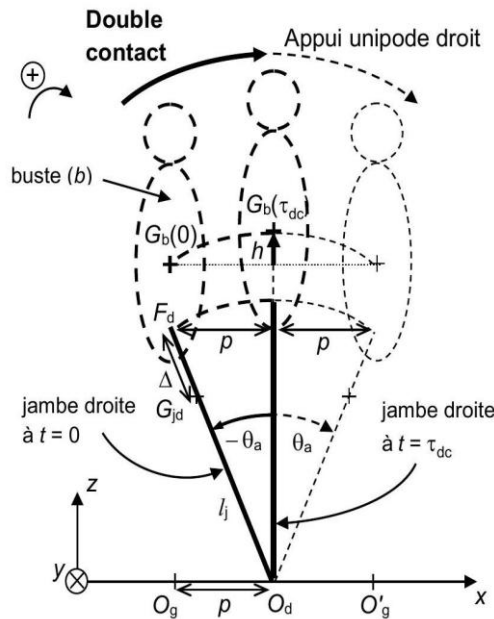


Figure 2a - Phase de double contact

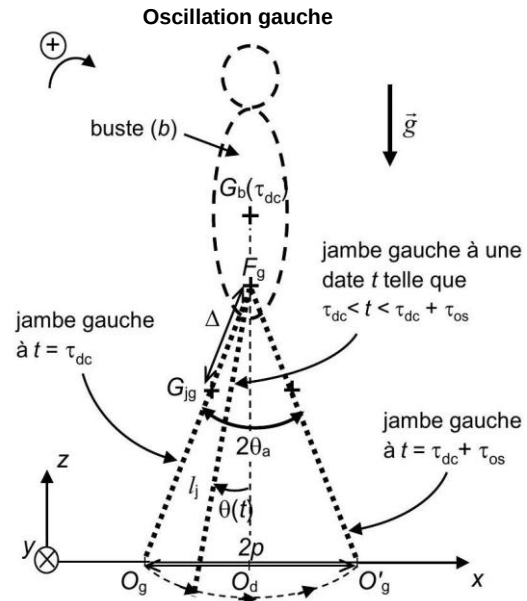


Figure 2b - Phase d'oscillation gauche

Oscillation gauche

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant : chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur l_j , de masse m_j , de centre de masse G_j et d'extrémité F (pivot fémoral). Ces points sont notés G_{jd} et F_d pour la jambe droite (j_d) et G_{jg} et F_g pour la jambe gauche (j_g). Le buste (b) est modélisé comme un solide de masse m_b et de centre de masse G_b . L'ensemble $(\Sigma) = \{(j_d), (j_g), (b)\}$ constitue le marcheur.

On note :

- $\Delta = F_d G_{jd} = F_g G_{jg}$.
- $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.
- J_F le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $F_d y$ (respectivement $F_g y$).
- J_O le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $O_d y$ (respectivement $O_g y$).

1 - Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit $\theta(t)$ la position angulaire de (j_g) par rapport à la verticale ascendante (figure 2b).

3. Déterminer l'expression de la période des petites oscillations de la jambe gauche, sans calcul mais en justifiant les analogies avec les résultats de la question 2.

2 - Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

On peut démontrer (voir DM) l'expression du pas p_{opt} qui optimise la puissance fournie par les muscles pendant la phase de double contact : $p_{opt} = \sqrt{\frac{2\ell_j J_O m_j \Delta}{J_F m_b}}$

4. Application numérique :

Avec $l_j = 1$ m, $m_j = 10$ kg, $m_b = 80$ kg, calculer p_{opt} dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme, pour laquelle on a $J_O = J_F$.

3- Pas optimal avec des échasses

Soit maintenant un berger monté sur ses échasses. Chacune d'elles est modélisée comme une tige de masse négligeable, de longueur l^* , solidarisée à la jambe et formant avec elle une "jambe équivalente" de longueur $l_j + l^*$. On note E le point de contact entre le sol et l'échasse et J_E^* le moment d'inertie, par rapport à l'axe Ey , de la "jambe équivalente".

5. Parmi les paramètres intervenant dans l'expression de p_{opt} , indiquer lesquels sont inchangés par rapport au cas sans échasses et lesquels sont à modifier. On précisera ces modifications et on expliquera clairement pourquoi ces paramètres sont modifiés.

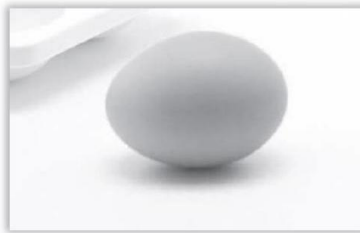
6. En déduire l'expression de p_{opt}^* , puis donner le rapport $\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}}$ en fonction de $\frac{J_E^*}{J_O}$ et de $\frac{l^*}{l_j}$.

Exercice 3' : loi du moment cinétique appliquée à un œuf (S2)

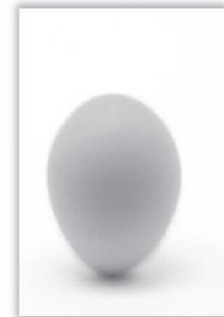
Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un œuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'œuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



a



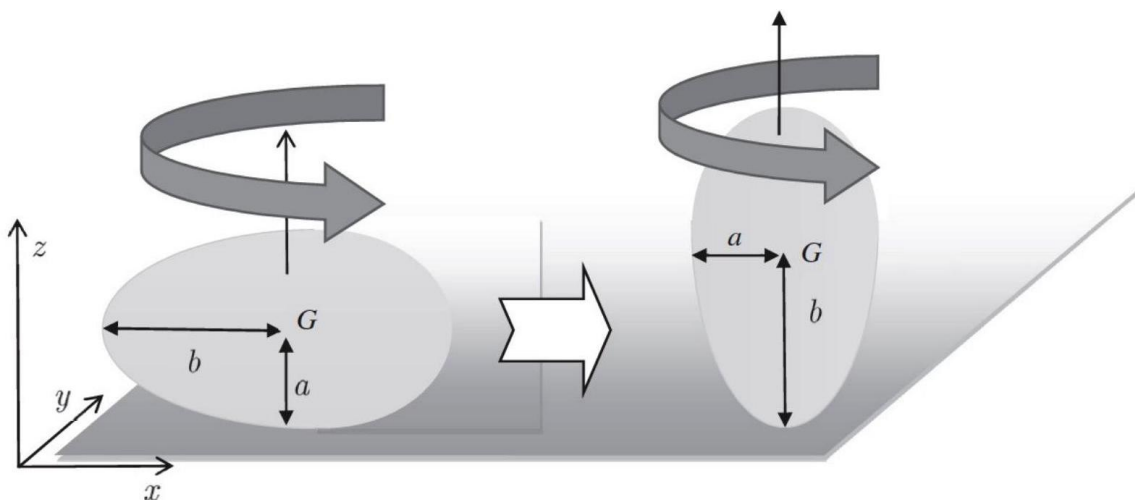
b



c

Évolution d'un œuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c.

On souhaite établir pour l'œuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la figure ci-dessous :



Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf. On modélise l'œuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m , de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'œuf). Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

$$J_H = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \text{ lorsque l'œuf tourne à l'horizontal,}$$

$$J_V = \frac{2}{5}ma^2 \text{ lorsque l'œuf tourne à la verticale.}$$

On pose Ω la vitesse de rotation de l'œuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

1. Comparer les deux moments d'inertie J_H et J_V et interpréter physiquement.
2. Après avoir rappelé l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire Ω , exprimer l'énergie mécanique totale de l'œuf dans les deux positions E_{m_H} et E_{m_V} en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.
3. Montrer qu'il existe une pulsation limite Ω_c telle que pour $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale. Ceci assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_c en fonction de a, b et g .

4. Calculer $\Omega_c = \sqrt{\frac{10g}{a+b}}$ pour $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 3,0 \text{ cm}$ et $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du document.

On suppose que le contact entre l'œuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'œuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'œuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_c$). L'œuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

5. Exprimer les énergies mécaniques initiale E_{m_H} et finale E_{m_V} au premier ordre en ε , sachant que $(A + B\varepsilon)^2 \approx A^2 + 2AB\varepsilon$ au premier ordre en ε .
6. En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b .

L'œuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ?

Que vaudrait r pour $a \approx b$? Commenter.

7. Exprimer les moments cinétiques L_H et L_V de l'œuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta L = L_V - L_H$ en fonction de Ω_c, m, a et b .

L'œuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

8. Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'œuf a subi un couple $\vec{C}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :

$$C_z \simeq \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}$$

9. Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Si non, d'où peut provenir ce couple ? En quoi y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

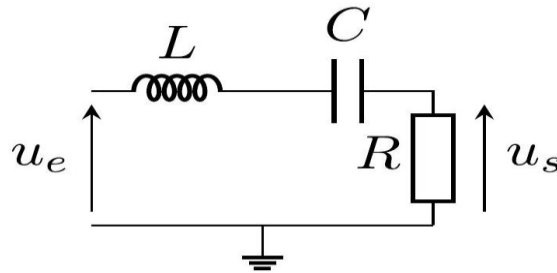
Exercice 4 : oscillations électriques et filtration (S1 et S2)

On souhaite réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal électrique, c'est-à-dire un montage qui permet de générer un signal quasi-harmonique, sans utiliser de signal harmonique en entrée.

Pour cela, on va coupler un montage amplificateur, utilisant un Amplificateur Linéaire Intégré, appelé ALI dans toute la suite, à un filtre passe-bande très sélectif.

1 Étude du filtre passe-bande (S1 et S2)

On considère le filtre RLC suivant, pour lequel la tension de sortie u_s est prise au niveau du résistor. On suppose de plus que la tension d'entrée est de la forme $u_e(t) = E \cos(\omega t)$.



1. Justifier que ce montage permet de réaliser un filtrage du type passe-bande.
2. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}$ de ce filtre, puis en déduire les expressions de ω_0 et Q à l'aide de la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On utilise alors les valeurs suivantes pour les composants : $R = 200 \, \Omega$, $L = 80 \, \text{mH}$ et $C = 20 \, \text{nF}$.

3. Tracer le diagramme de Bode (en gain uniquement) associé à ce filtre. On précisera les valeurs numériques de Q et ω_0 , le comportement asymptotique du filtre en donnant les équations des asymptotes basses fréquences et hautes fréquences (et la valeur où elles se coupent) ainsi que la courbe réelle.
4. Déduire de l'expression de $\underline{H}$, l'équation différentielle reliant les tensions u_s et u_e ? Cette dernière sera exprimée sous forme canonique, en fonction de ω_0 et Q . On précise de plus que u_e n'est pas une tension constante.

2 Étude du bloc amplificateur (S1 et S2)

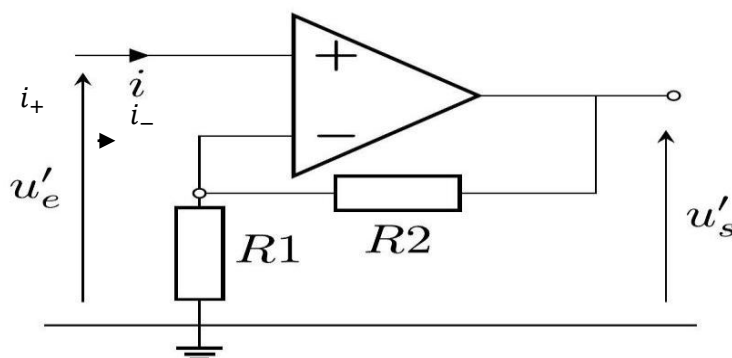
L'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) ci-contre est supposé idéal et est alimenté par un générateur $15 \, \text{V}, -15 \, \text{V}$. Les tensions d'entrée et de sortie sont notées u'_e et u'_s , pour ne pas interférer avec la première partie du problème.

Les propriétés de l'ALI (hors programme) permettent d'écrire les relations suivantes :

- le potentiel V_+ à la borne « + » de l'ALI est égal au potentiel V_- de la borne « - »
- $i_+ = i_- = 0 \, \text{A}$

Remarque :

Les résultats des questions 5 et 6 sont fournis à la page suivante...

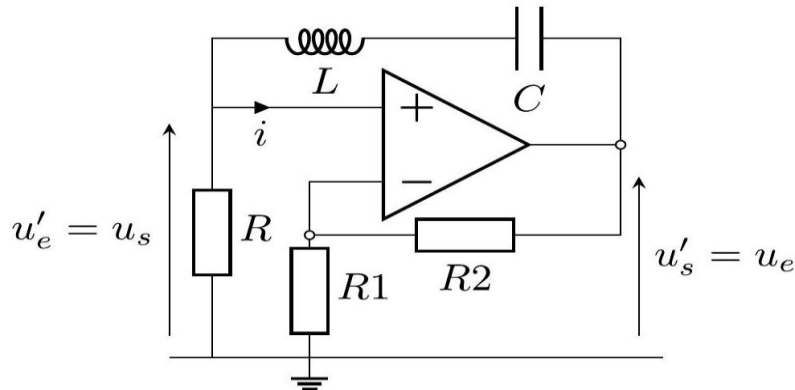


5. Établir l'expression de la fonction de transfert : $H' = \frac{u'_s}{u'_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Détailler les calculs.

Dans toute la suite, on note $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

3 Étude globale de l'oscillateur (S1 et S2)

On considère à présent le montage complet, composé du filtre RLC et du montage amplificateur.



Ces derniers sont reliés de sorte que $u'_s = u_e$ et $u'_e = u_s$.

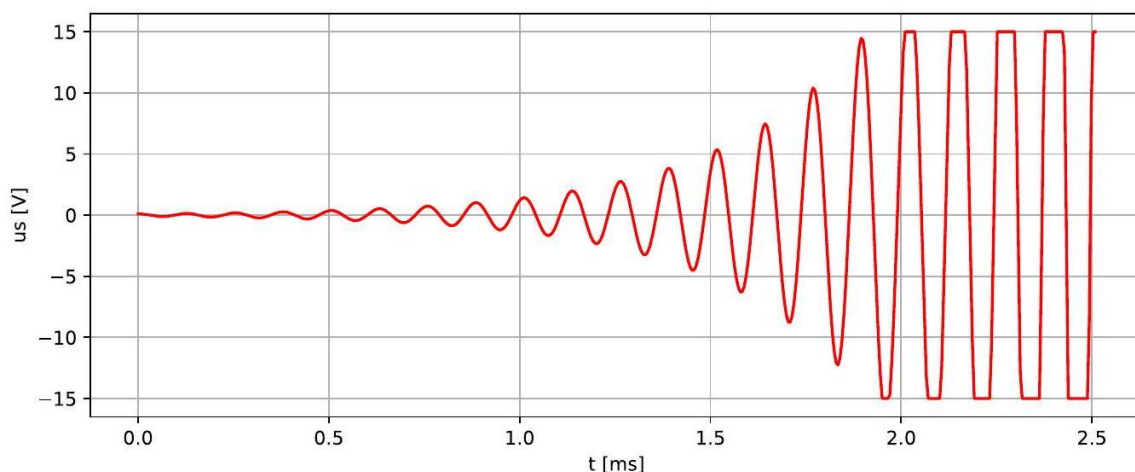
6. Démontrer que pour le montage complet, la tension u_s est solution de l'équation :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}(1 - G) \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0$$

On considère dans toute la suite que le gain G est légèrement supérieur à 1 de sorte que $G - 1 < 2Q$.

7. Exprimer les racines notées r_+ et r_- du polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle. On notera ω la pseudo-pulsation. En déduire l'existence de solutions qui vont diverger au cours du temps.

L'enregistrement à l'oscilloscope de la tension u_s est présenté sur la figure suivante. L'instant initial $t = 0$ correspond au moment où les deux blocs sont reliés.



8. A partir de 2 ms, l'ALI sature et la tension en sortie ne peut pas dépasser $|u_s| = 15$ V. On obtient un signal créneau.

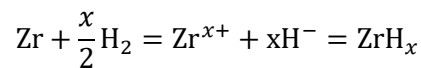
À partir du signal obtenu pour $t > 2$ ms, expliquer comment on pourrait obtenir un signal harmonique de pulsation ω par filtration ?

Exercice 5 : cristallographie (S1 et S2)

Donnée numérique : constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A \approx 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

1 Hydrure de zirconium ZrH_x (S1 et S2)

Le dihydrogène H_2 constitue un combustible de choix dans les propergols destinés aux fusées spatiales. Son stockage, problématique, peut être toutefois envisagé sous forme atomique au sein de divers matériaux : métaux et alliages par exemple. Ainsi, l'action directe du dihydrogène H_2 sur le zirconium métallique engendre un hydrure, de formule ZrH_x , avec x entier naturel à déterminer. La structure cristalline du zirconium métallique est de type cubique faces centrées. Dans la structure cristalline de l'hydrure ZrH_x , les atomes d'hydrogène H s'insèrent dans des sites interstitiels du réseau CFC du zirconium métallique. La réaction conduisant à la formation d'hydrure de zirconium ZrH_x à partir de dihydrogène et de zirconium métallique est :



1. Représenter la maille conventionnelle du réseau CFC du zirconium métallique. Situer explicitement les centres des sites interstitiels de type octaédrique, notés O, et de type tétraédrique, notés T, du réseau CFC du zirconium métallique.

On note r_O et r_T le rayon d'un atome assimilé à une sphère, et $r(\text{Zr})$ le rayon du zirconium métallique. Les indices O et T représentant respectivement les sites octaédriques et tétraédriques, dans lesquels peuvent s'insérer l'atome sans déformation du réseau CFC du zirconium métallique.

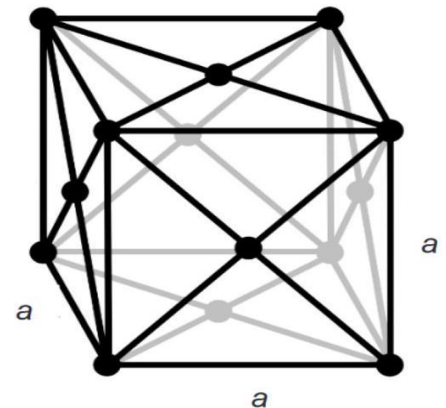
2. (S1) Démontrer les expressions numériques des rapports $\frac{r_O}{r(\text{Zr})}$ et $\frac{r_T}{r(\text{Zr})}$.

3. Les atomes d'hydrogène H se situant dans la totalité des sites interstitiels tétraédriques, déterminer la formule brute de l'hydrure ZrH_x .

4. Exprimer la capacité volumique d'absorption (masse d'hydrogène absorbé par unité de volume) C_{va} du zirconium métallique, en fonction de la masse molaire de l'hydrogène $M(\text{H})$ et du rayon du zirconium métallique $r(\text{Zr})$.

2 Structure cristallographique du chlorure de sodium (S1)

Le chlorure de sodium NaCl est un cristal ionique dans lequel les ions Na^+ forment un réseau de type cubique face centrée (cfc) de paramètre de maille a , représenté figure 3. Les ions Cl^- , quant à eux, se logent dans les sites octaédriques. On note r le rayon d'un cation Na^+ et R le rayon d'un anion Cl^- .



5. (S1) Combien y a-t-il d'ions sodium par maille ?

6. (S1) Combien y a-t-il de sites octaédriques par maille ? Sont-ils tous occupés par les atomes de chlore ?

On donne $r = 97 \text{ pm}$, $R = 181 \text{ pm}$ et $a = 556 \text{ pm}$.

7. (S1) Préciser si les ions Na^+ sont tangents entre eux et si oui, préciser suivant quel alignement. Préciser si les ions Na^+ et Cl^- sont tangents entre eux et si oui, préciser suivant quel alignement.

8. (S1) Exprimer, en fonction de r et de R , la compacité du cristal de NaCl .

9. (S1) Exprimer la masse volumique ρ_{NaCl} du chlorure de sodium en fonction de r et de R ainsi que des masses molaires $M(\text{Na})$ et $M(\text{Cl})$. Calculer ρ_{NaCl} en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$

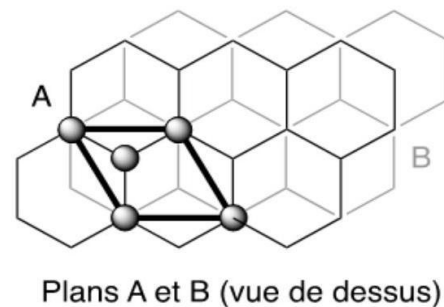
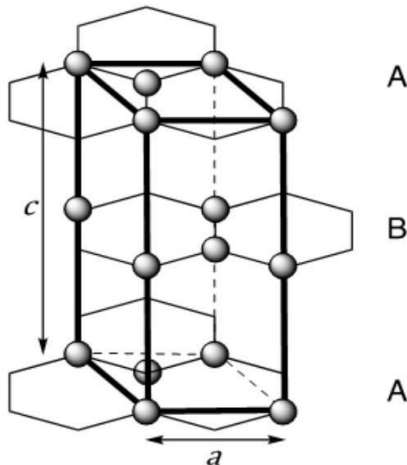
3 Le graphite et le graphène (S2)

Données numériques :

Longueur de la liaison C – C dans le graphite ou le graphène : $l_{C-C} = 0,14 \text{ nm}$

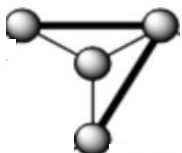
Distance entre deux feuillets de graphène dans le graphite : $L = 0,34 \text{ nm}$

Le graphène est préexistant dans le graphite. En effet, la structure du graphite est un empilement de plans décalés de graphène tenus entre eux par des forces de Van der Waals. Dans cet empilement, la moitié des atomes des hexagones du plan B sont positionnés au-dessous des centres des hexagones du plan A.

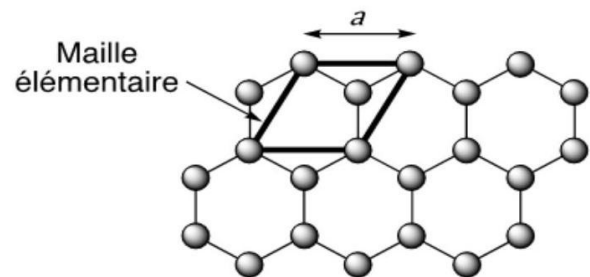


Le graphène

On considère dans un premier temps l'arrangement bidimensionnel d'atomes de carbone d'épaisseur monoatomique disposés suivant un réseau dit en nid d'abeilles. La structure cristallographique du graphène peut être décrite par la cellule unitaire en gras.



Aide : la distance entre un atome de carbone situé au sommet du triangle équilatéral ci-contre et l'atome de carbone situé au niveau du centre de gravité du triangle, est égale $\frac{2}{3}h$, h étant la hauteur du triangle.



10. (S2) Définir à quelle famille de cristaux appartient le graphène et démontrer la relation entre la longueur de la liaison l_{C-C} entre deux atomes de carbone et le paramètre de maille a .
11. (S2) Déterminer le nombre d'atomes de carbone dans la maille et la coordinence du carbone dans cet environnement.
12. (S2) Calculer la densité surfacique dans une monocouche de graphène, c'est-à-dire le rapport entre la surface occupée et la surface totale.

Le graphite

13. (S2) Donner le nombre d'atomes de carbone par maille (représentée en gras sur la figure de gauche) ainsi que leur coordinence (les atomes n'appartenant pas à la maille n'ont pas été représentés).
14. (S2) Calculer la densité d du graphite.
15. (S2) Déterminer l'expression de la compacité C en fonction de l_{C-C} , la longueur de la liaison C-C dans le graphite, et du paramètre de maille c .