

# DS 9 - CORRECTION

## Exercice 2 : oscillations d'un cadre métallique

1. Le système est le cadre et le référentiel est celui lié à la Terre, supposé galiléen.

Le poids s'applique au centre de gravité. On note H le projeté orthogonal du centre de gravité G sur l'axe  $\Delta$ . On a :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \overrightarrow{e_x} - \frac{\ell}{2} \cos(\theta) \overrightarrow{e_y}$$

et  $\vec{P} = -mg\overrightarrow{e_y}$  donc :

$$\overrightarrow{HG} \wedge \vec{P} = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta) \overrightarrow{e_z}$$

D'où le moment du poids par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$\Gamma_P = (\overrightarrow{HG} \wedge \vec{P}) \cdot \overrightarrow{e_z} = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta)$$

Le cadre est de plus soumis au couple des forces de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B} = I \vec{S} \wedge \vec{B} = IL\ell \vec{n} \wedge \vec{B}$$

avec  $\vec{n}$  vecteur unitaire défini sur le schéma.

Donc  $\vec{\Gamma}_L = IL\ell(\cos(\theta) \overrightarrow{e_x} + \sin(\theta) \overrightarrow{e_y}) \wedge B \overrightarrow{e_x} = -IL\ell B \sin(\theta) \overrightarrow{e_z}$

D'où :

$$\Gamma_L = -IL\ell B \sin(\theta)$$

Donc, d'après le théorème du moment cinétique scalaire, comme la liaison maintenant le cadre est une liaison pivot parfaite :

$$J_z \ddot{\theta} = \Gamma_P + \Gamma_L = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta - IL\ell B \sin \theta$$

2. Les positions angulaires d'équilibre correspondent à  $\Gamma_P + \Gamma_L = 0$  soit  $\sin \theta = 0$ . D'où :

$$\theta_e = 0 \quad \text{et} \quad \theta_e = \pi$$

3. Au voisinage de la position d'équilibre stable  $\theta_e = 0$ , c'est-à-dire aux petits angles ( $\sin(\theta) \approx \theta$ ), l'équation ci-dessus se réécrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \theta = 0$$

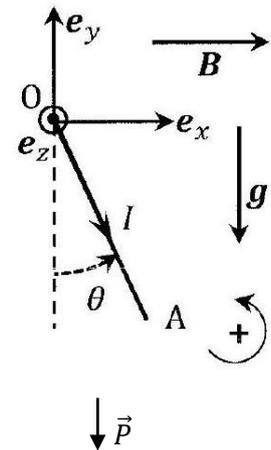
La position d'équilibre  $\theta_e = 0$  est effectivement stable car l'équation différentielle obtenue au voisinage de  $\theta_e = 0$  est celle de l'oscillateur harmonique ce qui signifie que, écartée légèrement de  $\theta_e = 0$ , le système va revenir vers cette position.

On identifie la pulsation propre des oscillations telle que :

$$\omega_0^2 = \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z}$$

D'où la période propre des oscillations :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \left( \frac{8\pi^2 J_z}{mg\ell + 2IL\ell B} \right)^{1/2}$$



4. On établit l'intégrale première du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

On primitive :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \cos \theta = \frac{1}{2} \dot{\theta}(0)^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \cos \theta(0) = \frac{1}{2} \dot{\theta}(0)^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z}$$

On cherche  $\dot{\theta} = 0$  pour  $\theta = \pi/2$  soit :

$$0 - 0 = \frac{1}{2} \dot{\theta}(0)^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z}$$

D'où :

$$\dot{\theta}(0) = \left( \frac{mg\ell + 2IL\ell B}{J_z} \right)^{1/2}$$

5. En l'absence de champ magnétique :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J_z} \sin \theta = 0$$

On établit là encore l'intégrale première du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J_z} \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

On primitive :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{mg\ell}{2J_z} \cos \theta = \frac{1}{2} \dot{\theta}(0)^2 - \frac{mg\ell}{2J_z} \cos \theta(0) = \frac{3mg\ell}{2J_z} - \frac{mg\ell}{2J_z} = \frac{mg\ell}{J_z}$$

La vitesse angulaire est minimale quand  $\theta = \pi$ , ce qui correspond à :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_m^2 = \frac{mg\ell}{J_z} + \frac{mg\ell}{2J_z} \cos(\pi) = \frac{mg\ell}{2J_z}$$

D'où :

$$\dot{\theta}_m = \left( \frac{mg\ell}{J_z} \right)^{1/2}$$

### Exercice 1 : chauffage par induction

1. On calcule le flux du champ créé par la bobine à travers la spire :  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$ . Or le champ est uniforme pour  $r < a_1$  et nul au-delà, donc  $\Phi = \pi a_1^2 \beta i_1$ .

Par identification avec la définition de  $M(\Phi = Mi_1)$ , on obtient  $M = \pi a_1^2 \beta$

Application numérique :  $\beta = \frac{B}{i_1} = \frac{13}{46.10^3}$  USI donc  $M \approx 3,5.10^{-3} \text{H}$

2. La loi des mailles dans le circuit 2 associée à la loi d'OHM et à la loi de FARADAY donne  $e = R_2 i_2 = -\frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt}$  avec  $\Phi_{\text{tot}} = L_2 i_2 + M i_1$ . On a donc :

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

$$\text{avec } \tau_1 = \tau_1 \frac{L_2}{M} \text{ et } \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

3. La solution est de la forme  $i_2(t) = Ae^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0$ . Comme  $i_2(0) = 0$ , on a  $i_2(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 (1 - e^{-t/\tau_2})$ .

En supposant  $t \ll \tau_2$ , au premier ordre en  $t/\tau_2$ , on trouve  $i_2(t) \approx \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 \frac{t}{\tau_2} = \boxed{I_0 \frac{t}{\tau_1}}$

4. La puissance instantanée reçue par  $R_2$  s'écrit  $\mathcal{P}_2 = R_2 i_2^2$  donc en intégrant :

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^{t_1} R_2 \left( I_0 \frac{t}{\tau_1} \right)^2 dt = R_2 \left( \frac{I_0}{\tau_1} \right)^2 \frac{t_1^3}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = \frac{R_2 M^2 I_0^2}{3 L_2^2} t_1}$$

Cette énergie est reçue par le plasma et augmente sa température.

5. D'après l'énoncé, la résistivité varie avec la température (elle diminue quand la température augmente), donc la résistance  $R_2$  varie aussi avec la température. Or nous venons de voir à la question précédente que la température du plasma augmente au cours du temps en raison de l'effet Joule. Nous pouvons donc en conclure que la résistance  $R_2$  évolue au cours du temps (elle diminue).

Le modèle précédent (où  $R_2$  était supposée constante) doit donc être revu.

### Exercice 1 : Contrôle de la qualité de l'eau d'un aquarium

1. couples de l'eau :  $\begin{matrix} \text{O}_2/\text{H}_2\text{O} \\ \text{H}_2\text{O}/\text{H}_2 \end{matrix}$  (avec  $\text{O}_2 = \text{oxydant}$  et  $\text{H}_2\text{O} = \text{réducteur}$ )  
(avec  $\text{H}_2\text{O} = \text{oxydant}$  et  $\text{H}_2 = \text{réducteur}$ )

2. m.o. (Mn dans  $\text{Mn}(\text{OH})_2$ ) =  $\boxed{\text{II}}$  car  $\text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Mn}(\text{OH})_2$   
donc m.o. (Mn dans  $\text{Mn}(\text{OH})_2$ ) = m.o. (Mn dans  $\text{Mn}^{2+}$ )

m.o. (I dans  $\text{IO}_3^-$ ) =  $\boxed{\text{IV}}$  car m.o. (I dans  $\text{IO}_2^-$ ) =  $-\text{II}$   
et m.o. (I dans  $\text{IO}_3^-$ ) + 3 m.o. (O dans  $\text{IO}_3^-$ ) =  $-1$

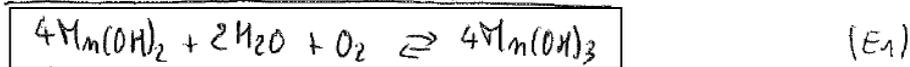
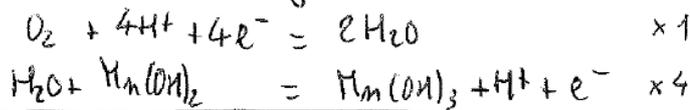
3. on classe de bas en haut les espèces par nombre d'oxydation croissant de Mn.  
Et pour un même nombre d'oxydation, on place à gauche de la frontière verticale l'acide et à droite la base.

Donc  $\boxed{E = \text{Mn}; C = \text{Mn}^{2+}; D = \text{Mn}(\text{OH})_2; A = \text{Mn}^{3+} \text{ et } B = \text{Mn}(\text{OH})_3}$

4. Les espèces stables dans l'eau en présence de dioxygène dissous sont  $\boxed{\text{Mn}^{2+}, \text{Mn}^{3+} \text{ et } \text{Mn}(\text{OH})_3}$  car leur domaine de stabilité présente une partie commune avec celui de  $\text{O}_2$  (et de  $\text{H}_2\text{O}$ ).

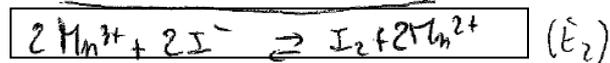
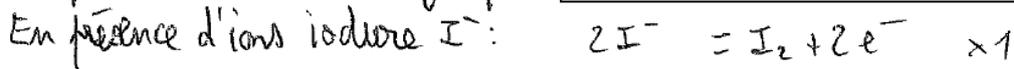
5. La dissolution du chlorure de Manganèse II libère des ions  $\text{Mn}^{2+}$ , en milieu acide ces ions sont stables dans l'eau contenant du  $\text{O}_2$  dissous. Alors qu'en milieu basique,  $\text{Mn}^{2+}$  se transforme en  $\text{Mn}(\text{OH})_2$  qui est instable en présence de  $\text{O}_2$ .

6. à l'étape 2,  $Mn(OH)_2$  réagit avec  $O_2$  :



Le précipité formé est  $Mn(OH)_3(s)$ . La réaction de formation de  $Mn(OH)_3$  est lente, ce qui explique la nécessité d'attendre 30 minutes.

7. En présence d'acide sulfurique :  $Mn(OH)_3(s) + 3H^+ \rightleftharpoons Mn^{3+} + 3H_2O$



8. Ajouter des ions  $I^-$  en large excès permet de consommer tous les ions  $Mn^{3+}$  (qui avaient été formés après réaction de  $Mn(OH)_2$  avec  $O_2$  puis acidification). Titrer le  $I_2$  formé permettra alors de remonter à la concentration en  $O_2$  initialement présente.

9. A l'équivalence du titrage :  $\frac{n(I_2)_{\text{titre}}}{1} = \frac{n(S_2O_8^{2-})_{\text{verre}}}{2} = \frac{C_1 V_1}{2}$

Or  $n(I_2)_{\text{titre}} = n(I_2)_{\text{formé par } (E_2)}$  =  $\frac{n(Mn^{3+})}{2}$  → consommés au cours de  $(E_2)$

et  $n(Mn^{3+}) = n(Mn(OH)_2) = 4n(O_2)$  → consommés au cours de  $(E_1)$

D'où  $n(O_2)_{\text{ini}} = \frac{n(Mn^{3+})}{4} = \frac{n(I_2)_{\text{titre}}}{2} = \frac{C_1 V_1}{4}$  et  $C(O_2) = \frac{C_1 V_1}{4 V_0}$

10.  $C(O_2) = \frac{C_1 V_1}{4 V_0} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 8,3}{4 \times 50} = 2,08 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 2,08 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} = 208 \text{ } \mu\text{mol} \cdot \text{kg}^{-1}$

11.  $C(O_2) > 90 \text{ } \mu\text{mol} \cdot \text{kg}^{-1}$  donc la vie marine est possible dans l'aquarium.