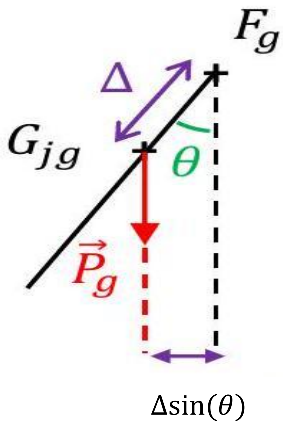
DM 6 - CORRECTION

Exercice 2 : marcher avec des échasses

1 - Étude de la phase d'oscillation gauche



1. La jambe gauche (j_g) est soumise à son poids $\vec{P}_g$ et l'action du buste sur la jambe gauche.
Cette action correspond à une liaison pivot d'axe $(F_g y)$ considérée comme parfaite donc son moment scalaire par rapport à l'axe $(F_g y)$est nul.

Le théorème du moment cinétique s'écrit donc : $J_F\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{(F_g y)}(\vec{P}_g)$

Le moment cinétique scalaire du poids par rapport à l'axe $(F_g y)$ se calcule directement en utilisant le bras de levier : $\mathcal{M}_{(F_g y)}(\vec{P}_g) = -m_j g\Delta\sin(\theta)$

D'où l'équation demandée : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_j g\Delta}{J_F}\sin(\theta) = 0}$

2. Des oscillations sont isochrones si leur pulsation ne dépend pas de l'amplitude des oscillations.
Dans l'approximation des petits angles l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{m_j g\Delta}{J_F}\theta = 0$$

On reconnait alors un oscillateur harmonique, la pulsation des solutions est une constante indépendante de l'intensité des oscillations. Le mouvement de (j_g) est donc bien isochrone.

3. La pulsation des oscillations se lit dans l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\boxed{\omega_{\text{os}} = \sqrt{\frac{m_j g\Delta}{J_F}}}$$

La phase d'oscillation correspond à une demi période, on a donc :

$$\tau_{\text{os}} = \frac{T_{\text{os}}}{2} = \frac{\pi}{\omega_{\text{os}}} = \boxed{\pi\sqrt{\frac{J_F}{m_j g\Delta}}}$$

2 - Étude de la phase de double contact

4. La variation d'énergie mécanique du système s'écrit : $\Delta\mathcal{E} = \Delta E_d + \Delta E_g + \Delta E_b$.
La variation d'énergie de la jambe droite en double contact est seulement la partie cinétique liée à la rotation de la jambe, d'où : $\Delta E_d = \frac{1}{2}J_o\Omega^2(\tau_{\text{dc}}) - \frac{1}{2}J_o\Omega^2(0) = \frac{1}{2}J_o\Omega^2(\tau_{\text{dc}})$.
La variation d'énergie de la jambe gauche est la même que pour la jambe droite : $\Delta E_g = \Delta E_d$.
La variation d'énergie du buste est seulement la partie potentielle puisque la vitesse du buste est considérée comme constante, d'où : $\Delta E_b = m_b g z_{G_b}(\tau_{\text{dc}}) - m_b g z_{G_b}(0) = m_b g h$.
La variation d'énergie mécanique est donc : $\boxed{\Delta\mathcal{E} = J_o\Omega(\tau_{\text{dc}}) + m_b g h}$

3 - Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

6. $\mathcal{P} = \frac{\Delta\varepsilon}{\tau_{\text{dc}}} = \frac{J_0\Omega(\tau_{\text{dc}})}{\tau_{\text{dc}}} + \frac{m_b g h}{\tau_{\text{dc}}}$

avec $\Omega(\tau_{\mathrm{dc}}) = \omega_{\mathrm{os}} = \sqrt{\frac{m_j g\Delta}{J_F}}$; $h = \frac{p^2}{2\ell_j}$ et $\tau_{\mathrm{dc}} = \frac{p}{V_{\mathrm{dc}}}$

On en déduit : $\mathcal{P} = \frac{J_O}{p}\frac{m_j g\Delta}{J_F}V_{\mathrm{dc}} + \frac{m_b g}{p}\frac{p^2}{2\ell_j}V_{\mathrm{dc}} = \boxed{\left(\frac{J_O m_j\Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{2\ell_j}\right)gV_{\mathrm{dc}}}$

On retrouve bien l'expression donnée dans le sujet.

7. On calcule la dérivée de la puissance par rapport au pas : $\frac{d\mathcal{P}}{dp} = \left(-\frac{J_O m_j\Delta}{J_F p^2} + \frac{m_b}{2\ell_j}\right)gV_{\mathrm{dc}}$

La puissance est maximale si : $-\frac{J_0 m_j\Delta}{J_F p_{\mathrm{opt}}^2} + \frac{m_b}{2\ell_j} = 0$

Donc pour le pas : $\boxed{p_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{2\ell_j J_O m_j\Delta}{J_F m_b}}}$

8. On considère $J_0 = J_F$ et $\Delta = \frac{\ell_j}{2}$

On a donc : $p_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{\ell_j^2 m_j}{m_b}}$

A.N. $p_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{1^2\times 10}{60}} = \boxed{0{,}4\ \mathrm{m} = 4\cdot 10^1\ \mathrm{cm}}$

4 - Pas optimal avec des échasses

9. Le pas optimal s'exprimait, sans les échasses : $p_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{2\ell_j J_O m_j\Delta}{J_F m_b}}$

La longueur des échasses allonge les jambes, $\boxed{\text{le paramètre } \ell_j \text{ devient } \ell_j + \ell^*}$.

Le point de contact change de O à E, $\boxed{\text{le paramètre } J_0 \text{ devient } J_E^*}$.

La masse des échasses étant négligeable, $\boxed{\text{les paramètres } m_j, m_b, \Delta \text{ et } J_F \text{ restent inchangés}}$.

10. La nouvelle expression du pas optimale est donc : $p_{\mathrm{opt}}^* = \sqrt{\frac{2(\ell_j+\ell^*)J_E^* m_j\Delta}{J_F m_b}}$

On calcule le rapport demandé : $\frac{p_{\mathrm{opt}}^*}{p_{\mathrm{opt}}} = \frac{\sqrt{\frac{2(\ell_j+\ell^*)J_E^* m_j\Delta}{J_F m_b}}}{\sqrt{\frac{2\ell_j J_O m_j\Delta}{J_F m_b}}} = \boxed{\sqrt{\left(1+\frac{\ell^*}{\ell_j}\right)\frac{J_E^*}{J_O}}}$

11. On nous donne : $J_O = \frac{m_j}{3}\ell_j^2$ et $J_E^* = \frac{m_j}{3}\left(\ell_j^2 + 3\ell^*\ell_j + 3\ell^{*2}\right)$

D'où : $\frac{p_{\mathrm{opt}}^*}{p_{\mathrm{opt}}} = \sqrt{\left(1+\frac{\ell^*}{\ell_j}\right)\frac{J_E^*}{Jo}} = \boxed{\sqrt{\left(1+\frac{\ell^*}{\ell_j}\right)\left(1+\frac{3\ell^*}{\ell_j}+\frac{3\ell^{*2}}{\ell_j^2}\right)}}$

12. On réalise l'application numérique pour $\ell_j = \ell^* = 1\ \mathrm{m}$

A.N. $\frac{p_{\mathrm{opt}}^*}{p_{\mathrm{opt}}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{3\times 1}{1}+\frac{3\times 1^1}{1^1}\right)} = \boxed{\sqrt{14} \approx 3{,}7}$

13. La durée de la phase d'oscillation a été calculée plus tôt : $\tau_{\mathrm{os}} = \pi\sqrt{\frac{J_F}{m_j g\Delta}}$

Cette durée ne dépend que de paramètres qui ne sont pas modifiés, $\boxed{\text{la durée de la phase d'oscillation reste donc inchangée}}$.

14. D'après l'énoncé : $V = Kp_{\mathrm{opt}}\omega_{\mathrm{os}}$ et $V^* = Kp_{\mathrm{opt}}^*\omega_{\mathrm{os}}^*$ avec K une constante.
Or d'après la question précédente $\omega_{\mathrm{os}}^* = \omega_{\mathrm{os}}$.
D'où le rapport des vitesses : $\frac{V^*}{V} = \frac{p_{\mathrm{opt}}^*}{p_{\mathrm{opt}}}\boxed{\approx 3{,}7}$
L'utilisation des échasses permettent donc bien d'augmenter de manière importante la vitesse des bergers.