Introduction

Avant de comprendre l'influence de l'environnement pour comprendre le déplacement des objets, il est important de pouvoir décrire convenablement le mouvement de ces objets : il s'agit de la cinématique. Et avant de partir sur des notions de cinématique, il est important de maitriser les vecteurs.

1. Un peu de maths

1.1 Les vecteurs dans un espace à n dimensions (n=1,2,3)

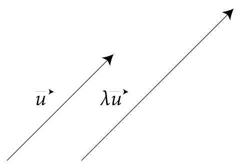
Définition 1 : Vecteur

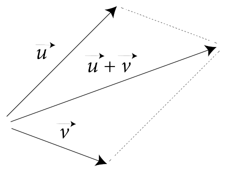
Un vecteur est caractérisé par :
- sa direction (une droite)
- son sens (une flèche)
- sa norme (une longueur)

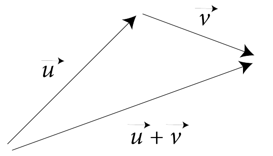
Remarque :

— Une grandeur vectorielle est donc le rassemblement de 3 informations (direction + sens + norme), alors qu'une grandeur scalaire est le rassemblement d'une unique information (sa valeur).

— Un vecteur PEUT avoir une dimension et donc une unité associée à la grandeur étudiée.







1.2 Coordonnées d'un vecteur

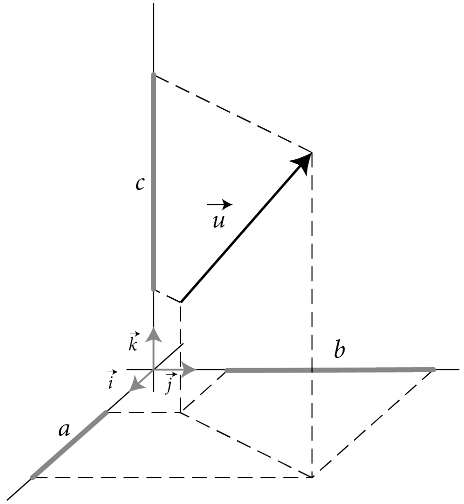
Définition 2 : Repère orthonormé

Un repère orthonormé est la réunion d'un point de l'espace à 3 dimensions (ce point est appelé origine O) et de 3 vecteurs orthogonaux les uns aux autres et de norme 1.

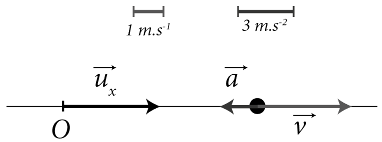
On utilise par la suite utilisé le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ mais on définira par la suite, les repères cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$, cylindrique $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ et sphérique $(M, \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.
Ce repère permet de décrire facilement n'importe quel vecteur dans l'espace avec un jeu de 3 scalaires.

Ce repère permet de décrire facilement n'importe quel vecteur dans l'espace avec un jeu de 3 scalaires.
En utilisant les relations de Chasles et la multiplication d'un vecteur par un scalaire, il est possible d'écrire le vecteur comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$\vec{u} = \underbrace{a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}}_{\text{écriture en ligne}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\text{écriture en colonne}}$$



Remarque : L'écriture en colonne sous-entend qu'on a bien défini le repère avant.



Lorsqu'on représente graphiquement une grandeur vectorielle (vecteur position, vitesse, force...), il faut associer une unité (représentée généralement par une échelle).

1.3 Opération sur les vecteurs

1.3.1 Egalité

Deux vecteurs sont égaux si leurs normes, leurs directions et leurs sens sont identiques.

Remarques :

— On ne peut pas écrire $\vec{u} < \vec{v}$ par exemple mais on peut comparer les normes.

— **On ne peut pas égaliser un vecteur avec un scalaire**.

1.3.2 Norme

Définition 3 : Norme

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ alors } \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

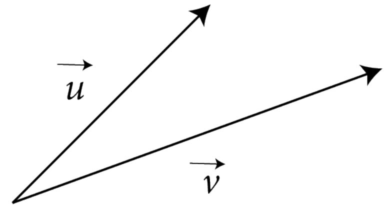
Remarque : $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

1.3.3 Produit scalaire

Définition 4 : Produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, alors le produit scalaire entre ces deux vecteurs est défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right).$$



Par la suite, on considère le repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ mais ces résultats restent toujours bons pour les autres repères cylindrique ou encore sphérique tant que les repères sont **orthonormés**.

Point méthode 1 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur

Méthode

Le vecteur s'écrit $\vec{u} = a\vec{u_x} + b\vec{u_y} + c\vec{u_z}$.
On propose ici deux méthodes de détermination des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée :

- Par le calcul
- Par le dessin (ou méthode pokemon / Zelda, à vous de voir...)

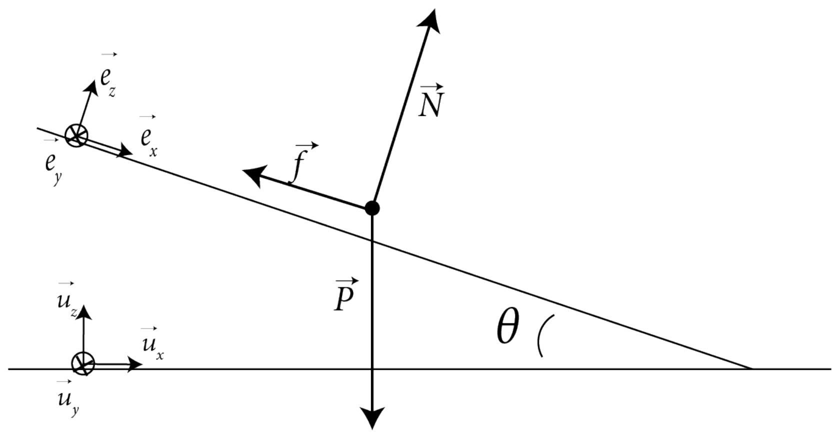
Par le calcul,
$\vec{u}.\vec{u_x} = a\vec{u_x}.\vec{u_x} + b\vec{u_y}.\vec{u_x} + c\vec{u_z}.\vec{u_x} = a.1 + b.0 + c.0 = a$
Réaliser un produit scalaire revient à réaliser la projection d'un vecteur (ici $\vec{u}$) sur un autre vecteur $\vec{u_x}$.

Donc finalement : $\begin{cases} \vec{u}.\vec{u_x} = a = \|u\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u_x}}\right) \\ \vec{u}.\vec{u_y} = b = \|u\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u_y}}\right) \\ \vec{u}.\vec{u_z} = c = \|u\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u_z}}\right) \end{cases}$

Par le dessin :

Exercice 1

On considère $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{f}$ trois vecteurs, et deux repères $\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$ et $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$. On appelle P, N et f les normes de $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{f}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs en fonction de P, N, f et θ.



1.3.4 Produit vectoriel

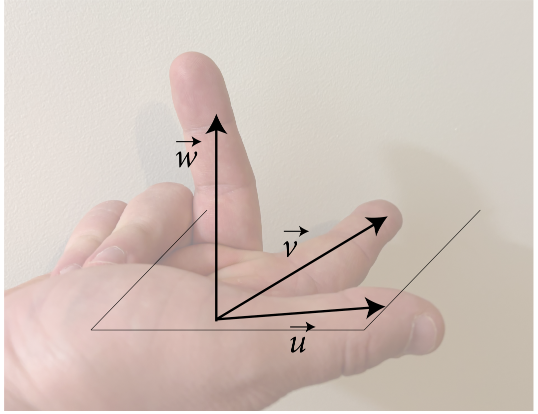
Définition 5 : Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ vérifiant :

— Norme : La norme du vecteur $\vec{w}$ est égale à $\|\vec{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)\right|$

— Direction : Le vecteur $\vec{w}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— Sens : Le sens du produit vectoriel est donné par "la règle de la main droite".

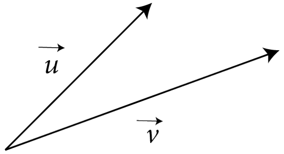


Remarques :

— Le calcul des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ revient à calculer $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

— Le double produit vectoriel est donné par $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{w}.\vec{u})\, \vec{v} - (\vec{w}.\vec{v})\, \vec{u}$

— Il existe un lien entre le produit vectoriel et l'aire balayé par les deux vecteurs.



Définition 6 : Repère orthonormé direct

On dit qu'un système de trois vecteurs est un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace si et seulement si :

— $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires : $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

— $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux entre eux : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{k}$.

— Le sens de $\vec{k}$ est donnée par la règle de la main droite avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (dans l'ordre !).

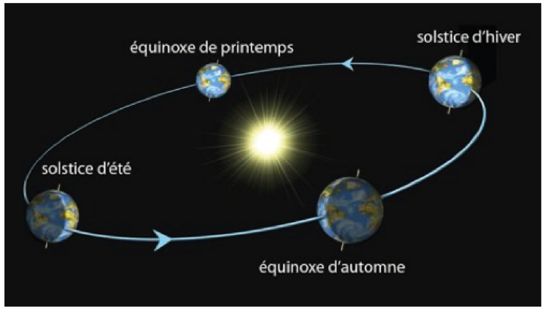
2.1 Modèle du point matériel

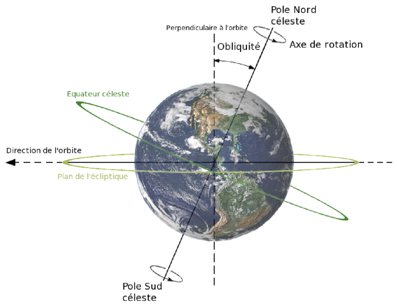
Définition 7 : Point matériel

On considère un système comme un point matériel lorsque ses dimensions sont très petites devant les dimensions caractéristiques de son mouvement. Dans ce modèle géométrique, sa trajectoire est écrite par seulement 3 degrés de liberté et uniquement de translation.

Exemple :

— Orbite de la Terre autour du Soleil.





Mais attention, si on s'intéresse en plus la rotation de la Terre sur son axe, on ne peut plus considéré la Terre comme un point matériel.

— Mouvement d'un surfeur sur la pente

Mais attention, si on s'intéresse au mouvement interne au skieur (déplacement des bras, chute qui s'accompagne d'une modification interne...), le modèle du point matériel n'est plus possible.

Pour pouvoir utiliser la notion de point matériel sur un système physique quelconque, on peut :

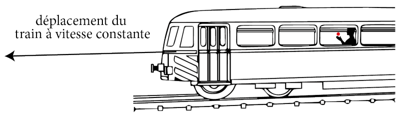
— Soit se limiter à l'étude du mouvement du centre d'inertie du système (cas de la Terre autour du Soleil, du skieur descendant une pente, ...) en considérant comme masse la masse du système.

— Soit découper le système en sous système élémentaire pour utiliser la notion de point matériel. On réalise alors un maillage.

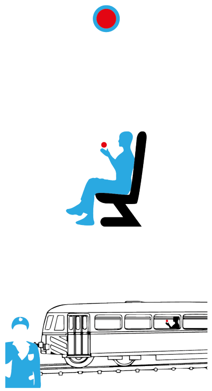
— Soit utiliser une théorie de la mécanique plus générale que la mécanique du point matériel : la mécanique du solide.

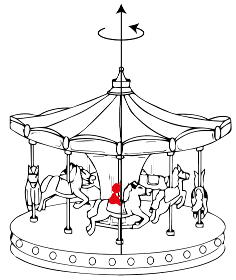
2.2 Référentiel d'étude

2.2.1 Définition

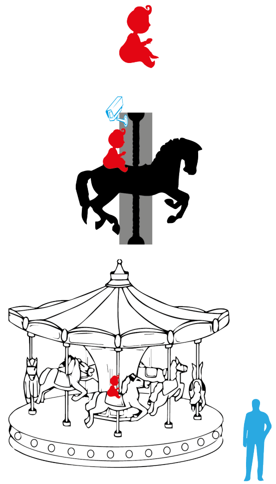


Situation : Balle jetée par une personne dans un train en mouvement.





Situation : Enfant sur un carroucel qui tourne.



Définition 8 : Référentiel

Un référentiel R est l'association :

— d'un point d'origine.

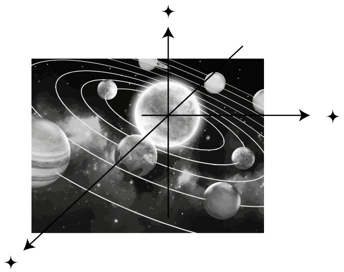
— d'un système de trois directions.

— d'une horloge.

Le référentiel est donc un objet (physique ou non physique), permettant de rendre compte de l'observateur : il est lié à un objet, dirigé via trois axes et possède une horloge.
Attention : ne pas confondre repère et référentiel.
Lors de l'étude du mouvement d'un objet, il faut obligatoirement définir le référentiel d'étude.

Remarque : Dans le cas de la mécanique classique, l'horloge est la même quelque soit le référentiel.

Référentiel de Copernic :

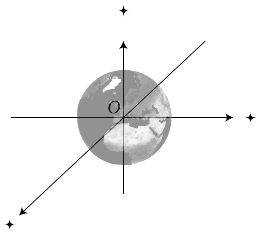


— Point d'origine :

— Directions :

— Une horloge.

Référentiel géocentrique :

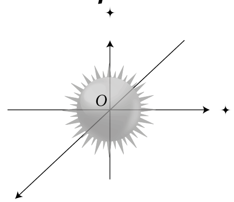


— Point d'origine :

— Directions :

— Une horloge.

Référentiel héliocentrique :

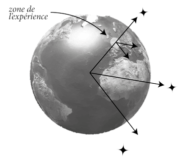


— Point d'origine :

— Directions :

— Une horloge.

Référentiel terrestre :



— Point d'origine :

— Directions :

— Une horloge.

2.2.2 Exemples

2.3 Temps et espace

2.3.1 Notion de temps

Caractériser le mouvement d'un point matériel nécessite de définir l'écoulement du temps. Il faut donc pour cela se doter :

— d'une unité de temps :

— d'une origine temporelle :

2.3.2 Notion d'espace à 3D

L'espace où se déplace un point matériel est un espace euclidien (où l'on peut définir une norme donc une distance) de dimension trois. Pour bien le définir, il est alors nécessaire de considérer :

— d'une unité de longueur :

— d'un repère (origine O et 3 vecteurs généralement orthonormés) pour définir les 3 coordonnées :

Remarque : Lorsque le mouvement a lieu sur un plan, seulement 2 vecteurs sont utiles. Lorsque le mouvement a lieu sur une droite, seulement 1 vecteur est utile.

2.3.3 Limite de cette étude

Le temps et l'espace sont des invariants du référentiel dans le cas où les vitesses des éléments étudiés sont à des vitesses faibles par rapport à la célérité de la lumière.
Lorsque les vitesses des éléments se rapprochent de la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$), les unités de temps ainsi que les unités de temps dépendront du référentiel considéré : il s'agit de la mécanique relativiste. Il en est de même lorsque les masses sont trop grandes.
Lorsque les tailles du problème sont infiniment petites, un autre formalisme de la physique est utilisé : la mécanique quantique.

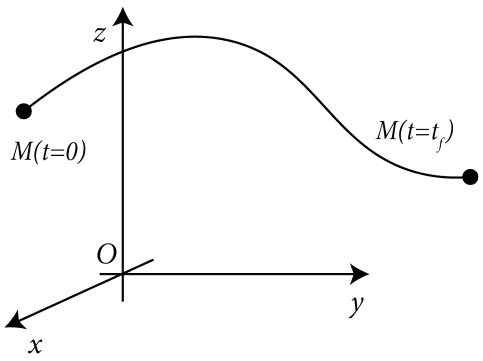
3. Etude du mouvement d'un point

3.1 Cadre de l'étude

Lors d'un problème de cinématique (et pour la suite de ce chapitre), il est obligatoire d'annoncer le référentiel choisi ainsi que le point matériel considéré. De plus, pour étudier ce mouvement à 3 dimensions, il est nécessaire d'utiliser les vecteurs et donc d'orienter l'espace avec un repère.

Cadre de l'étude

Soit $\mathscr{R}$ le référentiel d'étude.
Soit M le point matériel étudié.
Soit O l'origine du repère orthonormé cartésien $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$.



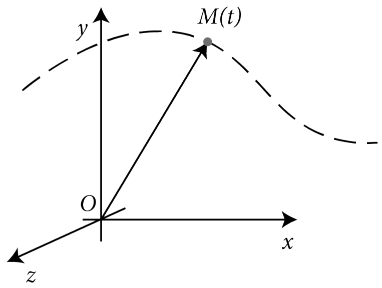
Remarques :

— L'origine du repère et l'origine du référentiel sont souvent confondues

— Les directions des vecteurs de la base sont généralement choisies pour permettre une simplification de l'étude du mouvement du point M. On verra par la suite comment les choisir.

3.2 Position, vitesse et accélération

3.2.1 Position d'un point M



Définition 9 : Vecteur position

On définit le vecteur position comme le vecteur reliant le point O et le point M : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

Propriétés : du vecteur position

- Type de grandeur :
- Dépendance :
- Unité :

Définition 10 : Trajectoire

On définit la trajectoire d'un point comme l'ensemble des positions du point M au cours de son trajet entre l'instant initial et l'instant final de son mouvement.

Remarques :

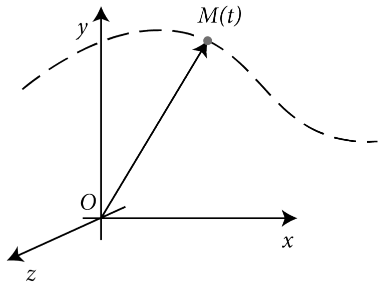
- Si le mouvement se fait sur une droite, alors le mouvement est dit **rectiligne**.
- Si le mouvement se fait sur un plan, alors le mouvement est dit **plan**.
- La trajectoire d'un point M est une courbe, pouvant être finie aux extrémités ou ayant un point initial et pouvant se continuer à l'infini.
- La connaissance de la trajectoire ne nous renseigne pas sur les mouvements du point M (arrêt, accélération, évolution de la vitesse. . .)
- Certaines trajectoires peuvent être bouclées, ce qui signifie que le point M revient à sa position initiale.

3.2.2 Vitesse d'un point M dans un référentiel $\mathscr{R}$

Définition 11 : Vitesse d'un point M

Par définition, on définit le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M}, t)$ du point M à l'instant t dans le référentiel $\mathscr{R}$ comme la dérivée temporelle du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$:

$$\overrightarrow{v_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M}, t) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}(t)$$

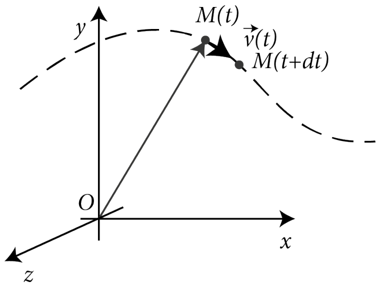


Propriétés : du vecteur vitesse

- Type de grandeur :
- Dépendance :
- Unité :
- Direction et sens :

Remarques :

- La connaissance de la vitesse à l'instant t et de la position à l'instant t permet de connaitre la position à l'instant t + dt :



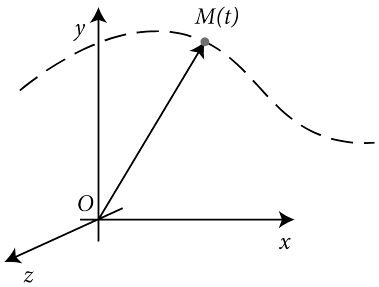
- Pour la suite, la vitesse pourra s'écrire $\vec{v}$ à condition de bien avoir préciser le référentiel R, le repère d'étude ainsi que le point M.

3.2.3 Accélération d'un point M dans un référentiel $\mathscr{R}$

Définition 12 : Accélération d'un point M

Par définition, on définit le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M}, t)$ du point M à l'instant t dans le référentiel R comme la dérivée temporelle du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{a_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M}, t) = \frac{d\overrightarrow{v_{\mathscr{R}}}}{dt}(t)$$

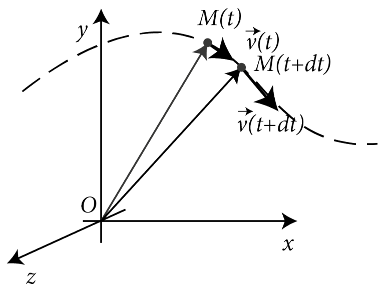


Propriétés : du vecteur accélération

- Type de grandeur :
- Dépendance :
- Unité :
- Direction et sens :

Remarques :

— La connaissance de l'accélération $\overrightarrow{a_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M},t)$ à l'instant t, de la vitesse $\overrightarrow{v_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M},t)$ à l'instant t et de la position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ à l'instant t permet de connaitre la position à l'instant t + dt, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+dt)$ et la vitesse à l'instant t + dt $\overrightarrow{v_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M},t+dt)$, et donc la position à t + 2dt, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+2dt)$.



— Pour la suite, l'accélération pourra s'écrire $\vec{a}(t)$ à condition de bien avoir préciser le référentiel $\mathscr{R}$, le repère d'étude ainsi que le point M.

3.2.4 Mouvement uniforme et uniformément varié

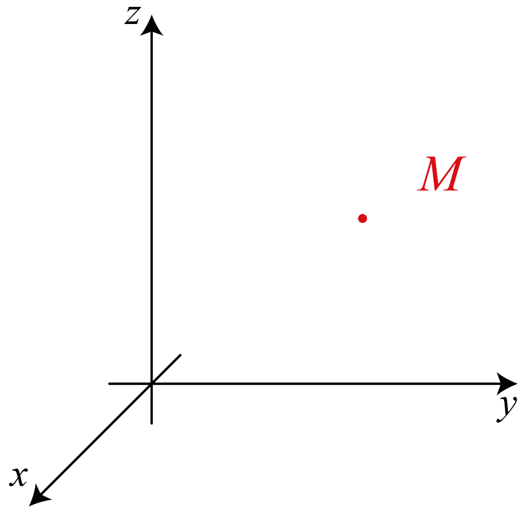
Définition 13 : Mouvement uniforme et mouvement uniformément varié

On dit qu'un mouvement est uniforme lorsque la norme du vecteur vitesse est constante $\|\vec{v}(t)\| = \text{cste}$.

On dit qu'un mouvement est uniformément varié lorsque la norme du vecteur accélération est constante $\|\vec{a}(t)\| = \text{cste}$.

4. Mouvement étudié dans différents repères

4.1 Repère cartésien



Définition 14 : Repère cartésien

Le repère cartésien est donné par l'origine O et les trois vecteurs de la base :

$$(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$$

Propriétés : du repère cartésien

— Repère orthogonal

— Repère normé :

— Repère direct :

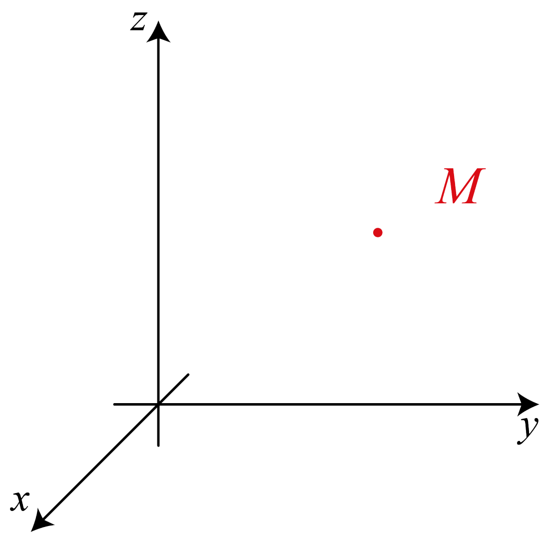
4.1.1 Position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération

Position :

Vitesse :

Accélération :

Remarque : Le déplacement élémentaire, c'est à dire le vecteur $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est donné par :



4.1.2 Mouvement rectiligne

Définition 15 : Mouvement rectiligne

On dit qu'un point matériel a un mouvement rectiligne si son déplacement s'effectue le long d'une droite fixe dans le référentiel d'étude.

Conséquence 1

- La vitesse et l'accélération sont portées par la même droite.
- On positionne généralement l'origine du repère de tel sorte que :
  - Le point se trouve en t = 0 sur le point O.
  - Le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ permet d'indiquer la convention.

Mouvement rectiligne uniforme :

Définition 16 : Mouvement rectiligne uniforme

M a un mouvement rectiligne uniforme si et seulement si M a un mouvement rectiligne et si la vitesse garde sa norme (et son sens) constant donc si et seulement si $\overrightarrow{v_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M}, t) = \overrightarrow{\mathrm{cste}}$.

On considère un point M se trouvant en O à $t = 0$ en mouvement rectiligne uniforme.

- Accélération :
- Equation horaire :
- Les différentes situations :

Mouvement rectiligne uniformément varié :

Définition 17 : Mouvement rectiligne uniformément varié

M a un mouvement rectiligne uniformément varié si et seulement si le mouvement est rectiligne et si $\overrightarrow{a_{/\mathscr{R}}}(\mathrm{M}, t) = \overrightarrow{\mathrm{cste}}$.

On considère un point M se trouvant en O à $t = 0$ en mouvement rectiligne uniformément varié et sans vitesse initiale.

— Accélération :

— Vitesse :

— Equation horaire :

— Les différentes situations :

Exercice 2

On souhaite déterminer la hauteur maximale atteint par une balle de masse m lancée, à partir du point O, verticalement à la vitesse $v_0 > 0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. L'axe vertical est appelé (Oz). On montrera, par la suite (voir M2), que son accélération, durant le vol, est constante : $\overrightarrow{a} = -g\overrightarrow{u_z}$ où $\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire vertical vers le haut.

1. Décrire le référentiel et les points et vecteurs particuliers. Faire un schéma à un instant t donné.
2. Décrire les conditions initiales.
3. Connaissant l'accélération, déterminer la vitesse en utilisant les conditions initiales.
4. Connaissant la vitesse, déterminer la position en utilisant les conditions initiales. Répondre à la question.
5. La balle est maintenant lancée avec un angle θ par rapport à l'horizontal (on reste dans le modèle où l'accélération est toujours la même). Déterminer l'allure de la trajectoire et déterminer la hauteur maximale.

Remarque : Il s'agit d'un mouvement uniformément varié avec :

— Une phase de décélération lorsque le vecteur vitesse est opposé au vecteur accélération.

— Un instant d'arrêt

— Une phase d'accélération dès que le vecteur vitesse est dans le même sens que le vecteur accélération.

Conclusion :

Vitesse	+	+	-	-
Accélération	+	-	+	-
Mouvement				

4.1.3 Autres trajectoires

Déterminer la trajectoire mathématiques d'un point revient à déterminer dans le repère d'étude le lien existant entre les différentes coordonnées du point sans faire intervenir le temps (ou du moins le moins possible...) en utilisant les équations horaires de chaque coordonnées.
Plusieurs méthodes existent et le choix de la méthode dépendra du type de données.

Exercice 3

On se place dans le référentiel associé au laboratoire. On considère le point M, se déplaçant selon les coordonnées dans le repère cartésien : $\begin{cases} x(t) = 5t + 1 \\ y(t) = 2t^2 + 2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$

1. Quelle est sa position à t = 0 s ? à t = 2 s ?
2. Montrer que le mouvement est plan.
3. Déterminer la trajectoire du point M et tracer l'allure de la trajectoire.

Exercice 4

On considère un enfant sur un manège simple. On se place dans le référentiel du parent se trouvant en dehors du manège. Le point O se trouve au centre du manège. L'enfant est repéré par le point M, se déplaçant selon les coordonnées dans le repère cartésien : $\begin{cases} x(t) = \mathrm{R}\cos(\omega t) \\ y(t) = \mathrm{R}\sin(\omega t) \\ z(t) = h \end{cases}$

1. Représenter sur deux graphes l'allure de x et de y en fonction du temps.
2. Déterminer la trajectoire. La tracer.

4.2 Repère cylindrique

4.2.1 Définition

Définition 18 : Repère cylindrique

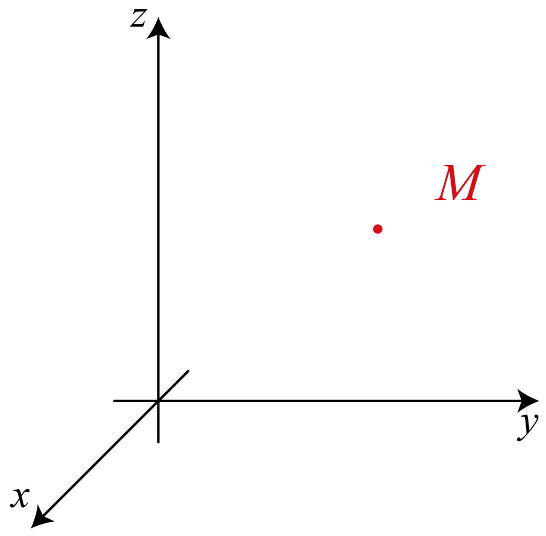
Le repère cylindrique est donné par l'origine M et les trois vecteurs de la base $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\right)$:

$$\left(\mathrm{M}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\right)$$

et les coordonnées du point M est données par $\mathrm{M}\,(r, \theta, z)$.

Vecteurs du repère :

Coordonnées du repère :



Propriétés : du repère cylindrique

— Repère orthogonal

— Repère normé :

— Repère direct :

— Il s'agit d'un repère mobile. C'est à dire qu'il se déplace en même temps que le point M. On pourra cependant parfois représenter les vecteurs de la base au niveau de O.

Lien entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes :

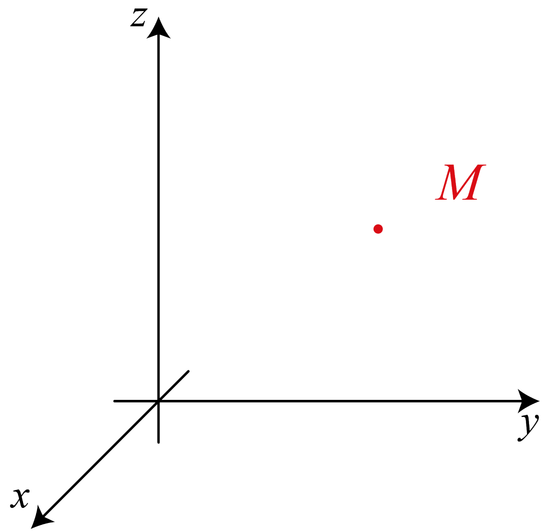
Lien entre les vecteurs cylindriques et les vecteurs cartésiens :

4.2.2 Position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération

Position :

Vitesse :

Accélération :



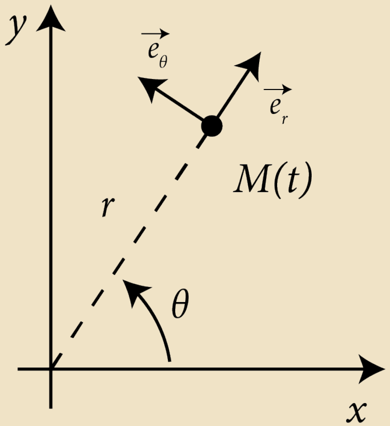
Remarque : Le déplacement élémentaire, c'est à dire le vecteur $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est donné dans le repère cylindrique par :

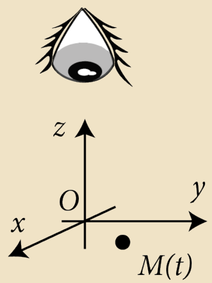
4.2.3 Repère polaire

Définition 19 : Repère polaire

Dans le cas où la trajectoire reste dans le plan (z = cste, généralement nul), on préfère utiliser le repère polaire :

$$\left(\mathrm{M}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$$

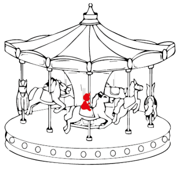




4.2.4 Mouvement circulaire

Définition 20 : Mouvement circulaire

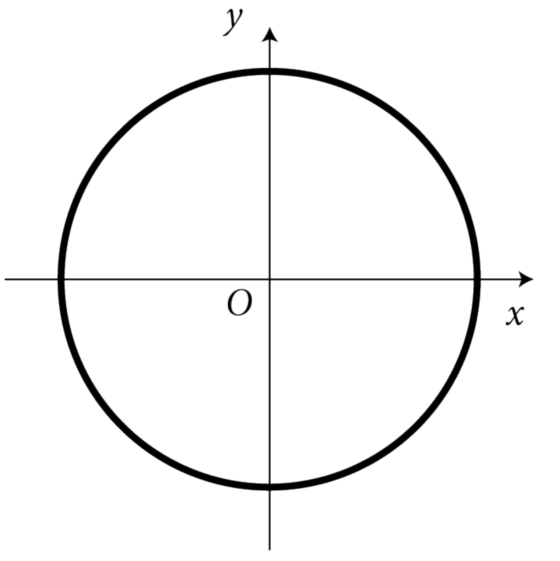
Le mouvement d'un point M est dit circulaire lorsque son mouvement décrit un cercle, c'est à dire que sa trajectoire est un cercle, dans le référentiel étudié.



Exemples :

— Enfant sur un manège fixe

— Lune autour de la Terre (en première approximation), ...



Repère utilisé :

Vecteur position :

Vecteur vitesse :

Vecteur accélération :

Définition 21 : Mouvement circulaire uniforme

On dit que le point M a un mouvement circulaire uniforme lorsque son mouvement est circulaire et que la norme et le sens de son vecteur vitesse sont constants au cours du temps.

Conséquence 2

Définition 22 : Vitesse angulaire

On définit la vitesse angulaire par :

$$\omega\,(\mathrm{M}, t) = \dot{\theta}(t)$$

Le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}\,(\mathrm{M}, t)$ est définie comme un vecteur :

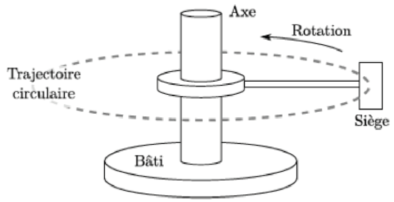
— de norme :

— de direction normale au cercle :

— de sens défini par la règle du tire bouchon (ou de la main d'Ampère) :

Exercice 5

Pour entraîner les astronautes aux fortes accélérations subies lors du décollage et lors de la rentrée dans l'atmosphère, on les place dans un siège situé à l'extrémité d'un bras en rotation. Un point M du sujet (par exemple son œil gauche) décrit dans le référentiel lié au sol un cercle de rayon $\mathrm{R} = 5{,}0\,\mathrm{m}$ à la vitesse angulaire ω.



1. Pourquoi l'énoncé précise-t-il un point du sujet, et non pas simplement le sujet ?
2. Quelle est la valeur de la vitesse angulaire $\omega = \omega_0$ (en tour/seconde) pour laquelle l'accélération du point M dans le référentiel lié au sol est égale à $30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$?
3. Quelle est la valeur de la vitesse ?
4. Quelle est alors l'accélération du point M dans le référentiel lié au siège ?
5. Partant de la vitesse nulle, la valeur ω_0 est atteinte au bout de 10 s, et on suppose que entre $t = 0$ et $t = 10\,\mathrm{s}$, la vitesse angulaire est une fonction linéaire du temps. Déterminer le vecteur accélération à la date $t_1 = 5\,\mathrm{s}$.

Exercice 6

On considère un point M ayant comme coordonnée dans le repère polaire $\begin{cases} r(t) = a\,(1-\cos(5\omega t)) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$.

1. Tracer l'allure de la trajectoire de M.
2. Déterminer sa vitesse et son accélération.

4.3 Repère sphérique

4.3.1 Définition

Définition 23 : Repère sphérique

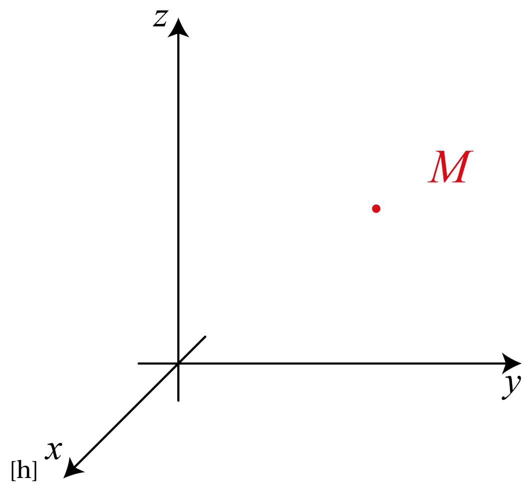
Le repère sphérique est donné par l'origine M et les trois vecteurs de la base $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$:

$$\left(\mathrm{M}, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$$

et les coordonnées du point M est données par $\mathrm{M}\left(\rho, \theta, \varphi\right)$.

Vecteurs du repère :

Coordonnées du repère :



Propriétés : du repère sphérique

- Repère orthogonal
- Repère normé :
- Repère direct :
- Il s'agit d'un repère mobile. C'est à dire qu'il se déplace en même temps que le point M. On pourra cependant parfois représenter les vecteurs de la base au niveau de O.

Lien entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes :

4.3.2 Position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération

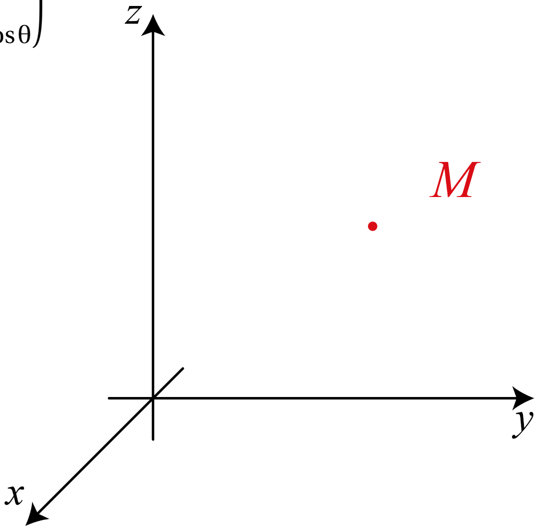
Position :

Vitesse :

$$\vec{v}\,(\mathrm{M}, t) = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \rho\dot{\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Accélération :

$$\vec{a}\,(\mathrm{M}, t) = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ +\rho\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}$$



Remarque : Le déplacement élémentaire, c'est à dire le vecteur $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est donné dans le repère sphérique par :

5. Etude générale d'un mouvement

5.1 Retour sur la trajectoire

On considère un point M, initialement au point M_0 vérifiant $\mathrm{M}(t=0) = \mathrm{M}_0$ se déplaçant dans l'espace, traçant une courbe trajectoire notée $\mathscr{C}$.

Définition 24 : Abscisse curviligne

On considère un point M, initialement au point M_0 vérifiant $M(t=0) = M_0$ se déplaçant dans l'espace, traçant une courbe trajectoire notée $\mathscr{C}$. On définit l'abscisse curviligne à l'instant t, la grandeur $s(t)$ d'un point M comme la distance entre M_0 et $M(t)$ le long de la trajectoire $\mathscr{C}$.

$$s(t) = \overset{\frown}{M_0M}(t)$$

Définition 25 : Vitesse moyenne

On définit la vitesse moyenne d'un point M entre un instant t_A et un instant t_B comme la grandeur :

$$v_{moy} = \frac{s(t_B) - s(t_A)}{t_B - t_A}$$

Remarque : Cas d'un mouvement rectiligne :

Définition 26 : Degré de liberté

Les degrés de liberté d'un point matériel correspondent aux différentes possibilités de mouvement du système étudié en fonction de l'environnement qui le contraint.

Le nombre de degré de liberté donne le nombre minimal de paramètres à connaitre pour étudier son mouvement.
Dans le cas d'un point M :

— libre de se déplacer dans l'espace :

— libre de se déplacer sur un plan, une sphère, une surface... :

— libre de se déplacer sur une droite, un cercle, une courbe connue... :

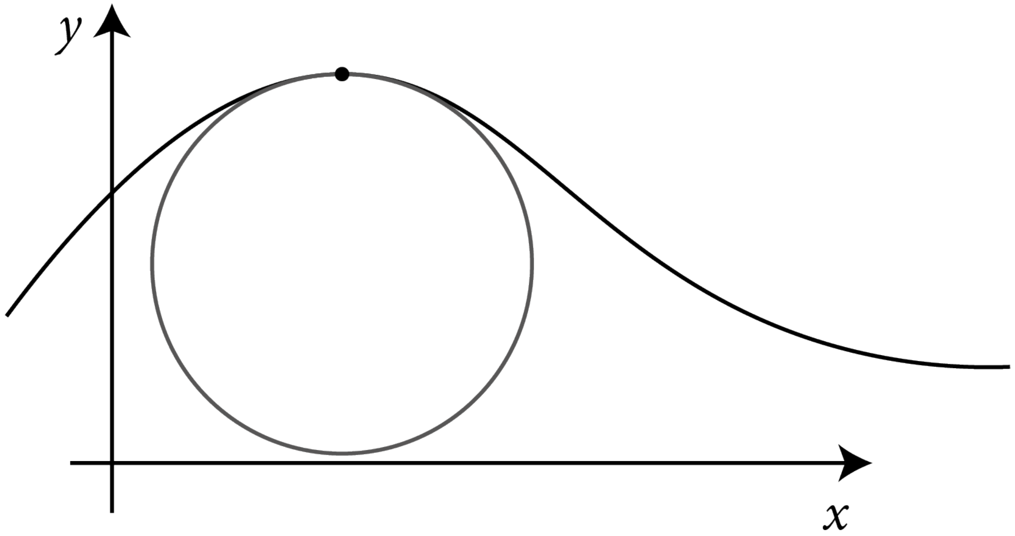
5.2 Définition du repère de Fresnet

Définition 27 : Repère de Fresnet

On définit le repère de Fresnet $\left(M, \overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n}\right)$ comme le repère définit par l'origine le point M et la base $\left(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n}\right)$ où

— $\overrightarrow{u_t}$: vecteur unitaire tangent à la courbe $\mathscr{C}$ (trajectoire) au niveau du point M et orienté dans le sens de déplacement du point M.

— $\overrightarrow{u_n}$: vecteur unitaire normal au vecteur $\overrightarrow{u_t}$ orienté vers le centre du cercle, dit osculateur, tangent à la courbe $\mathscr{C}$ au niveau du point $M(t)$.



Propriétés : Repère de Fresnet

- La vitesse :

- L'accélération :