

Introduction

Le chapitre précédent a introduit la notion de forces. Cependant, les forces sont des notions mathématiques permettant de relier le mouvement d'un point et les interactions de ce point avec le milieu extérieur.

Chaque système en interaction avec son environnement échange avec celui-ci de l'énergie. Il peut en fournir ou en recevoir mais elle ne peut être produite ni détruite. Ce principe de conservation est fondamentale. L'énergie se présente sous différentes formes : énergie électrique, énergie thermique ou encore énergie potentielle. L'énergie cinétique du point a une place particulière.

Cadre de l'étude :

Soit un référentiel d'étude \mathcal{R} , que l'on supposera Galiléen : la plupart du temps, ça sera le référentiel terrestre pendant une période courte. Soit le point M, de masse m, parcourant l'espace avec une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M, t)$.

1. Energie cinétique d'un point

1.1 Définition

Définition 1 : Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M, t)$ est :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(M, t) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M, t)\|^2$$

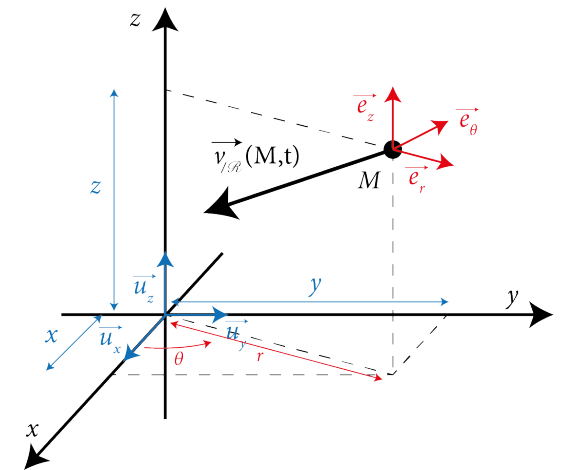
Propriétés : de l'énergie cinétique

- Type de grandeur :
- Signe :

- Dépendance :
- Unité :
- Expression dans les repères :

Dans le repère cartésien :

Dans le repère cylindrique :



1.2 Théorème de la puissance cinétique

Dans le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R} , considérons un point M , se déplaçant dans l'espace et soumis à des interactions avec le milieu extérieur :

Définition 2 : Puissance d'une force

La puissance $\mathcal{P}_{\vec{F}}$ d'une force \vec{F} s'appliquant sur un point matériel M de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M, t)$ dans le référentiel d'étude \mathcal{R} est :

$$\mathcal{P}_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}}(M, t)$$

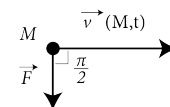
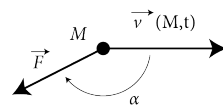
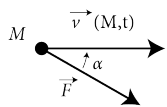
Loi : Théorème de la puissance cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel mobile M dans un référentiel galiléen \mathcal{R} est égale à la somme des puissances de toutes les forces qui s'exercent sur le point M .

$$\frac{d\mathcal{E}_{c|\mathcal{R}}}{dt}(M, t) = \sum_{\neq \text{forces}} \mathcal{P}_{\vec{F}} = \mathcal{P}_{\Sigma \vec{F}}$$

Propriétés : puissance d'une force

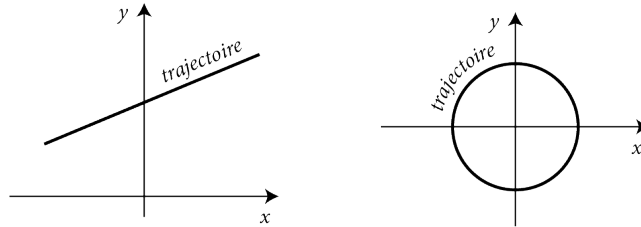
- Sens physique :
- Dépendance :
- Unité :
- Signe :



Ces théorèmes sont extrêmement pratiques et donnent accès à une équation scalaire lorsque le mouvement est unidimensionnel.

Définition 3 : Mouvement unidimensionnel

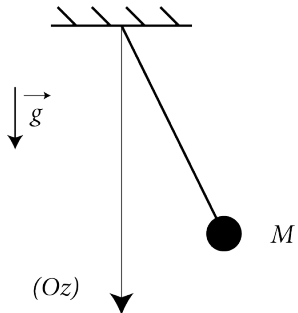
Un mouvement est dit unidimensionnel lorsque le mouvement du point M peut être décrit uniquement par l'évolution d'une coordonnée dans un repère particulier.

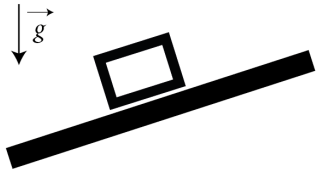


Point méthode 1 : Déterminer l'équation du mouvement unidimensionnel



1. Faire un schéma de la situation.
2. Définir le référentiel.
3. Définir le système.
4. Définir le repère d'étude : on recherche un repère adapté à la géométrie du mouvement rendant compte d'un mouvement unidimensionnel.
5. Faire un bilan des forces.
6. Choix de la résolution (application du théorème de la puissance cinétique ici).
7. Déterminer le membre de gauche (cinématique). Déterminer le membre de droite (dynamique).





1.3 Travail d'une force

Définition 4 : Travail infinitésimal (ou travail élémentaire) d'une force \vec{F}

On appelle le travail élémentaire de la force au cours du déplacement infinitésimal du point M comme la quantité d'énergie transférée pendant un intervalle de temps infinitésimal dt par cette force :

$$\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Soit un point M se déplaçant entre le point A et le point B selon la trajectoire \mathcal{C}_{AB} .

Expression dans le repère cartésien :

A diagram showing a path in a Cartesian coordinate system with axes x and y . The path starts at point A and ends at point B. A differential displacement vector $d\vec{OM}$ is shown along the path, with its components dx , dy , and dz indicated.

$$d\vec{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Expression dans le repère cylindrique :

A diagram showing a path in a cylindrical coordinate system with axes x and z . The path starts at point A and ends at point B. A differential displacement vector $d\vec{OM}$ is shown along the path, with its components dr , $r d\theta$, and dz indicated.

$$d\vec{OM} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix}$$

Définition 5 : Travail d'une force \vec{F}

Sur un déplacement le long d'un chemin \mathcal{C}_{AB} (on part de A à l'instant t_A vers B à l'instant t_B par le chemin), la quantité d'énergie transmise par la force notée $W_{\vec{F}}$, appelé travail de la force \vec{F} sur le chemin \mathcal{C}_{AB} , est donnée par :

$$W_{\vec{F}} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Propriétés : Travail infinitésimal d'une force et travail d'une force sur un chemin \mathcal{C}

- Type de grandeur :
- Dépendance :

- Unité :
- Résultante de plusieurs forces :
- Signes :

Cas du travail d'une force constante (comme le poids) :

1.3.1 Théorème de l'énergie cinétique

Loi : Théorème de l'énergie cinétique

Soit un point M se déplaçant sur un chemin \mathcal{C}_{AB} reliant A et B.

La variation de l'énergie cinétique du point M entre le moment où il se trouve au niveau du point A et du point B est égale à la somme des différents travaux des forces s'appliquant sur le point M sur le chemin \mathcal{C}_{AB} .

$$\Delta \mathcal{E}c = \mathcal{E}c_B - \mathcal{E}c_A = \sum_{\vec{F}} W_{\vec{F}} \text{ avec } W_{\vec{F}} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Lorsque les deux instants sont infiniment proche (variation infinitésimale) :

$$d\mathcal{E}c = \mathcal{E}c(t+dt) - \mathcal{E}c(t) = \sum_{\vec{F}_i} \delta W_{\vec{F}_i}$$

Remarque :

Lorsque nous étudions un mouvement (et plus tard en thermodynamique), des grandeurs vont être utilisées pour étudier une variation infinitésimale ou une variation macroscopique. Il sera alors nécessaire de différencier les notations :

- Ne dépend pas du chemin : Il s'agit des grandeurs dont on va étudier les variations entre deux instants représentés par Δ et d . Ça sera le cas de l'énergie cinétique : $\Delta \mathcal{E}c = \mathcal{E}c(t_2) - \mathcal{E}c(t_1)$ et $d\mathcal{E}c = \mathcal{E}c(t+dt) - \mathcal{E}c(t)$.
- Dépend du chemin : il s'agit d'une grandeur qui s'obtient en étudiant le mouvement tout au long de la durée entre deux instants t_1 et t_2 . Ce sera le cas du travail : W et δW .

Attention

Il y a trois niveaux d'homogénéité dans les équations en physique :

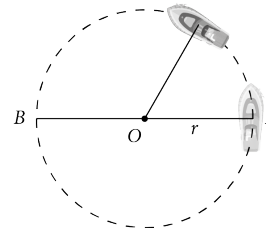
- L'homogénéité en terme de dimension : Si $X = Y$ alors $\dim(X) = \dim(Y)$.
- L'homogénéité en terme de grandeur vectorielle ou scalaire : Si $X = Y$ et X est un vecteur/scalaire alors Y est aussi un vecteur/scalaire.
- L'homogénéité en terme de variation : Une variation **infinitésimale** d'une grandeur doit être égale à une quantité **infinitésimale** échangée ou à une variation **infinitésimale** d'une autre grandeur (ou une somme de... avec des coefficients de proportionnalité). Une variation **macroscopique** d'une grandeur doit être égale à une quantité **macroscopique** échangée ou à une variation **macroscopique** d'une autre grandeur (ou une somme de... avec des coefficients de proportionnalité).

Exercice 1

Un boulet est initialement lâché sans vitesse initiale à une hauteur h . Déterminer la vitesse lors de l'impact en considérant l'absence de frottement.

Exercice 2

1. On considère un bloc de masse m que l'on souhaite hisser d'une hauteur h grâce à une corde et une poulie. On suppose que la poulie est parfaite pour le lever d'une hauteur h . Déterminer l'énergie nécessaire pour réaliser cette opération.
2. Un véhicule, assimilé à un point matériel M , est en mouvement circulaire (rayon r) de vitesse v (maintenue constante) à partir du point A . La force de frottement fluide, agissant sur le véhicule, est du type : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$. Déterminer le travail W de la force de frottement fluide, lorsque le point matériel passe en B , après n tours complets.
3. Commenter les résultats obtenus.



2. Energie potentielle

2.1 Force conservative et force non conservative

Définition 6 : Force dissipative et force conservative

On dit qu'une force est conservative lorsque son travail au cours du déplacement du point M est indépendant du chemin suivie, uniquement de l'état final et de l'état initial.

Si la force n'est pas conservative, elle est dite non-conservative.

Conséquence 1

Une force \vec{F} est conservative si et seulement si son travail infinitésimal s'écrit comme une différentielle, c'est à dire une petite variation :

$$\delta W_{\vec{F}} = df$$

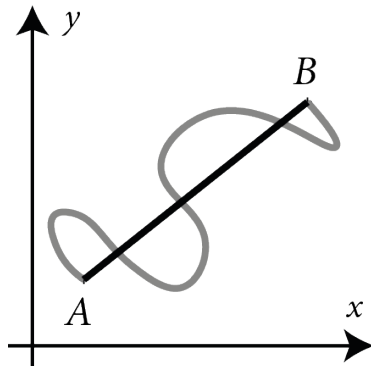
Définition 7 : Force dissipative et force conservative

Soit une force conservative \vec{F} . On définit l'énergie potentielle associée à la force \vec{F} comme la grandeur $\mathcal{E}p$ vérifiant :

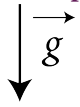
$$\delta W_{\vec{F}} = -d\mathcal{E}p$$

Propriétés : d'une énergie potentielle

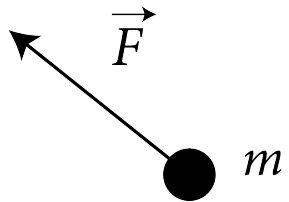
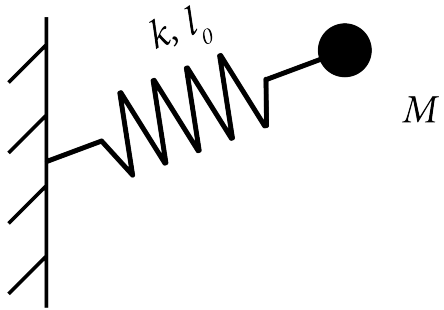
- Unité :
- Type de grandeur :
- Définition :
- Cas du chemin macroscopique \mathcal{C}_{AB} entre un point A et un point B :



Exemples:



● M de masse m



2.2 Lien entre les différentes grandeurs

Lien entre travail d'une force conservative et énergie potentielle

$$\delta W_{\vec{F}_c} = -dE_p$$

Lien entre puissance d'une force conservative et énergie potentielle

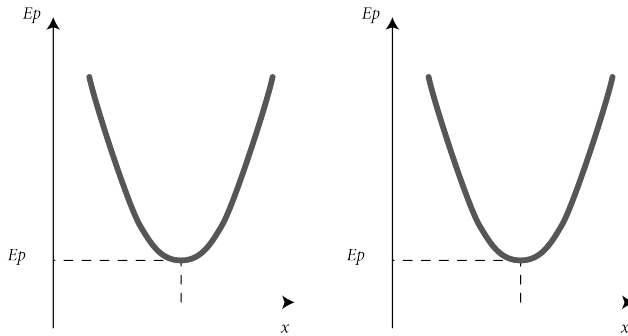
La puissance d'une force conservative s'exerçant sur le point M vérifie :

$$\mathcal{P}_c = \frac{\delta W_{\vec{F}_c}}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}(t)$$

Lien entre force conservative et énergie potentielle

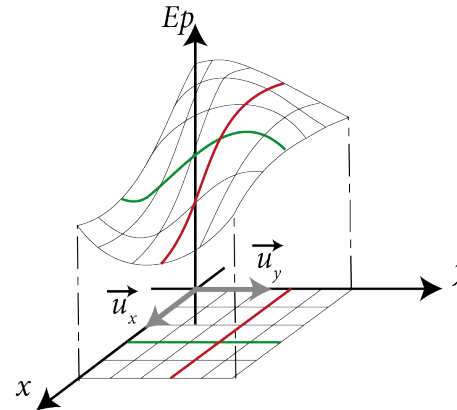
Dans le cas d'un problème à 1 degré de liberté avec une force conservative unidirectionnelle et ne dépendant que de x , $\vec{F} = F(x)\vec{u}_x$:

$$\delta W_{\vec{F}_c} = \mathcal{P}_c \cdot dt = \begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{v} = F(x) \frac{dx}{dt} dt = F(x) dx \\ -dE_p \end{cases}$$



Dans le cas d'un problème à 2 degrés de liberté avec une force conservative s'écrivant $\vec{F} = F_x(x, y)\vec{u}_x + F_y(x, y)\vec{u}_y$ avec une énergie potentielle s'écrivant $\mathcal{E}p(x, y)$:

$$\vec{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}p}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{E}p}{\partial y} \end{pmatrix}$$



Généralisation : Dans le cas d'une force conservative \vec{F} , l'énergie potentielle vérifie :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}p = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}p}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{E}p}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{E}p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3. Energie mécanique

3.1 Définition

Définition 8 : Energie mécanique

L'énergie mécanique du point M est défini par :

$$E_m = \mathcal{E}p + \mathcal{E}c$$

Propriétés : de la puissance d'une force

- Dépendance :
- Unité :
- Signe :

3.2 Théorème de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique

Loi : Théorème de la puissance mécanique

Soit un point M en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen. La dérivée de son énergie mécanique est égale à la somme des différentes puissances des forces non-conservatives s'appliquant sur le point M :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

Loi : Théorème de l'énergie mécanique

Soit un point M en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen. La variation infinitésimale de son énergie mécanique est égale à la somme des différents travaux infinitésimaux des forces non-conservatives s'appliquant sur le point M :

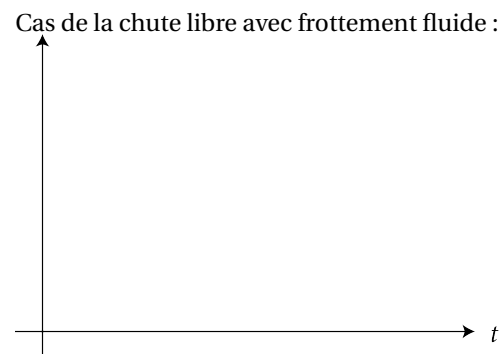
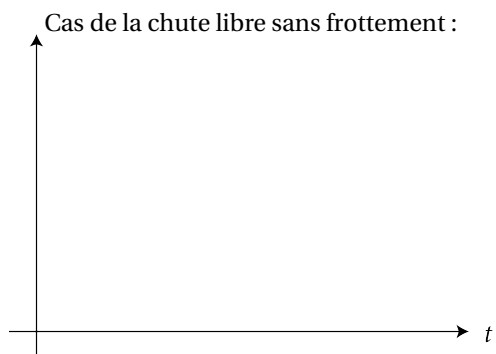
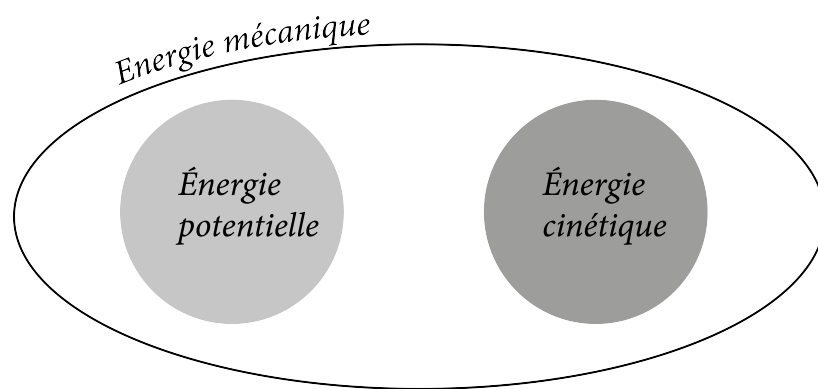
$$dE_m = E_m(t + dt) - E_m(t) = \sum_{\vec{F}} \delta W_{\vec{F}_{nc}}$$

Soit un point M en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, se déplaçant du point A au point B selon le chemin \mathcal{C}_{AB} . La variation de l'énergie mécanique du point M entre le moment où il se trouve au niveau du point A et du point B est égale à la somme des différents travaux des forces non conservatives s'appliquant sur le point M sur le chemin \mathcal{C}_{AB} .

$$\Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = \sum_{\vec{F}} W_{\vec{F}_{nc}} \text{ avec } W_{\vec{F}_{nc}} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{OM}$$

Conservation de l'énergie mécanique : On considère un point M soumis à uniquement des forces conservatives,

L'énergie potentielle est donc une réserve d'énergie cinétique. Les forces non-conservatives sont des fuites ou des gains d'énergie mécanique du milieu extérieur.



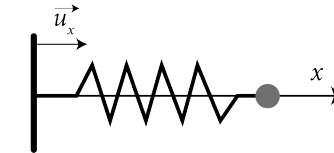
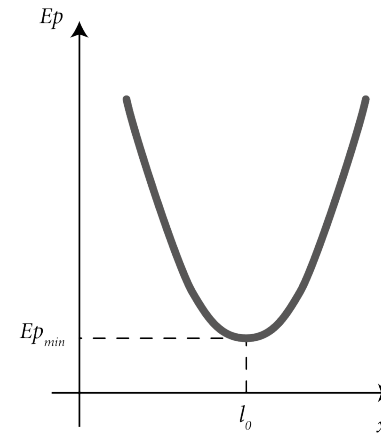
4. Equilibre d'un point

4.1 Exemple

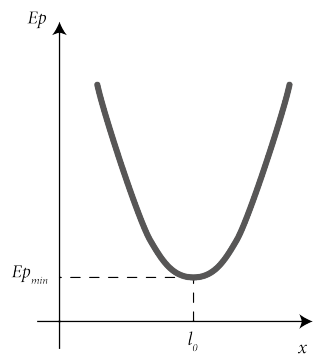
Ressort horizontal accroché au mur horizontal.

L'énergie potentielle du système est une fonction de la position x du point M :

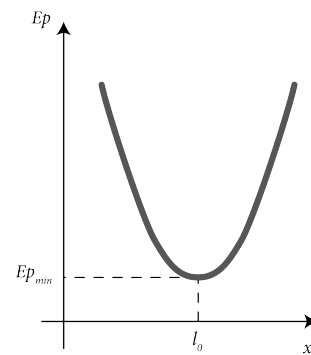
Energie mécanique :



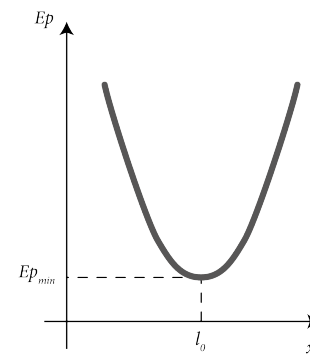
Cas où $\mathcal{E}m < \mathcal{E}p_{min}$:



Cas où $\mathcal{E}m > \mathcal{E}p_{min}$:



Cas où $\mathcal{E}m = \mathcal{E}p_{min}$:



4.2 Equilibre d'un point

Définition 9 : Equilibre d'un point et position d'équilibre

L'équilibre d'un point se traduit par $\vec{v}_{\mathcal{R}}(\text{M}, t) = \vec{0}$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}}(\text{M}, t) = \vec{0}$.

La position d'équilibre x_{eq} imposée par le milieu extérieur soumettant un point à des forces conservatives associées à une énergie potentielle $\mathcal{E}p$ ne dépendant que de la variable de position x vérifie :

$$\frac{d\mathcal{E}p}{dx}(x = x_{eq}) = 0$$

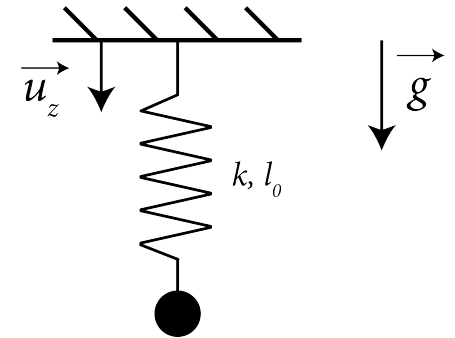
Remarques :

— Dans le cas général, lorsque l'énergie potentielle dépend des trois coordonnées de la position :

$$\frac{d\mathcal{E}p}{dx}(x = x_{eq}, y = y_{eq}, z = z_{eq}) = \frac{d\mathcal{E}p}{dy}(x = x_{eq}, y = y_{eq}, z = z_{eq}) = \frac{d\mathcal{E}p}{dz}(x = x_{eq}, y = y_{eq}, z = z_{eq}) = 0$$

— Graphiquement, la tangente de l'énergie potentiel est horizontale.

Exemple : Cas du ressort vertical :



4.3 Stabilité d'un point d'équilibre

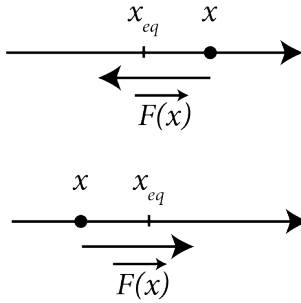
Définition 10 : Equilibre stable et équilibre instable

On dit qu'on a un équilibre stable si lorsqu'on écarte le point de cette position de manière modérée, il a tendance à revenir au point d'équilibre.

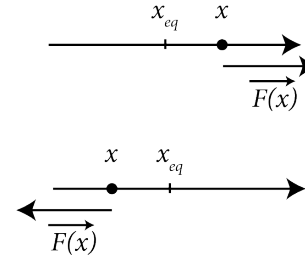
On dit qu'on a un équilibre instable si lorsqu'on écarte le point de cette position de manière modérée, il s'en écarte définitivement.

Conséquence 2

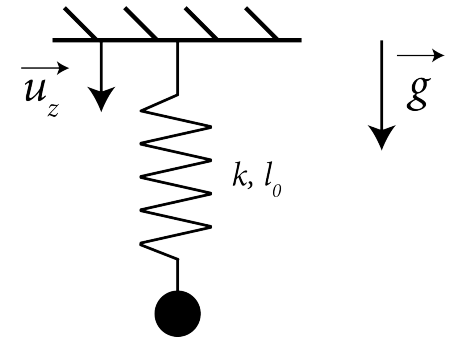
Cas de l'équilibre stable : La force ramène le point M sur sa position d'équilibre.



Cas de l'équilibre instable : La force éloigne le point M sur sa position d'équilibre.

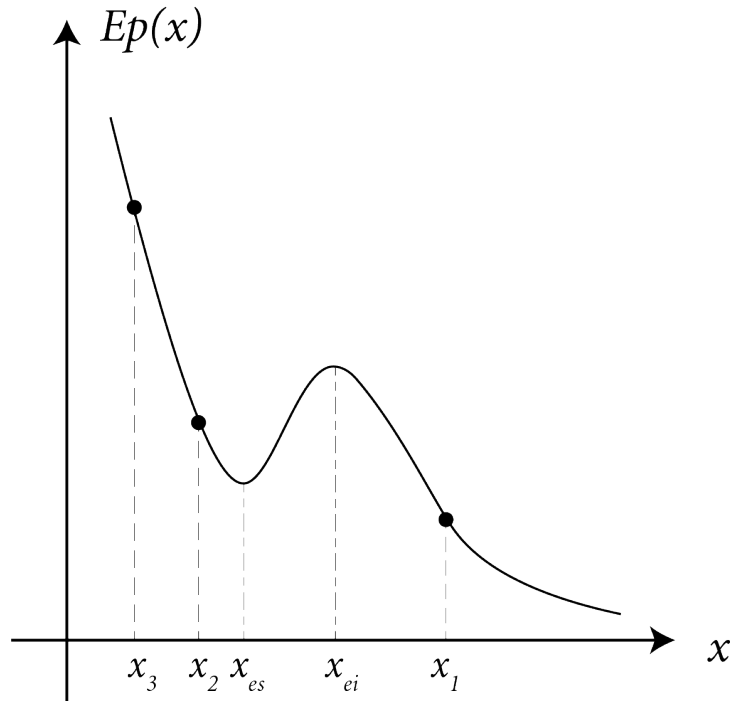


Exemple : Cas du ressort vertical :



4.4 Mouvement d'un point

On considère un point M possédant un degré de liberté dont l'énergie potentielle suit le graphe suivant. Initialement, le point M est sans vitesse initiale pour différentes positions.



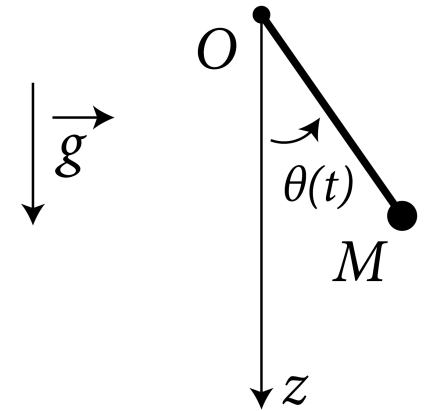
4.5 Mouvement autour d'un point d'équilibre

4.5.1 Cas du pendule :

Exercice 3

On considère un pendule constitué d'un fil inextensible de masse négligeable attaché d'un côté à une potence et de l'autre à un point M de masse m . On repère l'angle θ comme sur le schéma ci-contre. On se placera dans un repère cylindrique adapté. On suppose qu'il n'y a pas de phénomène dissipatif.

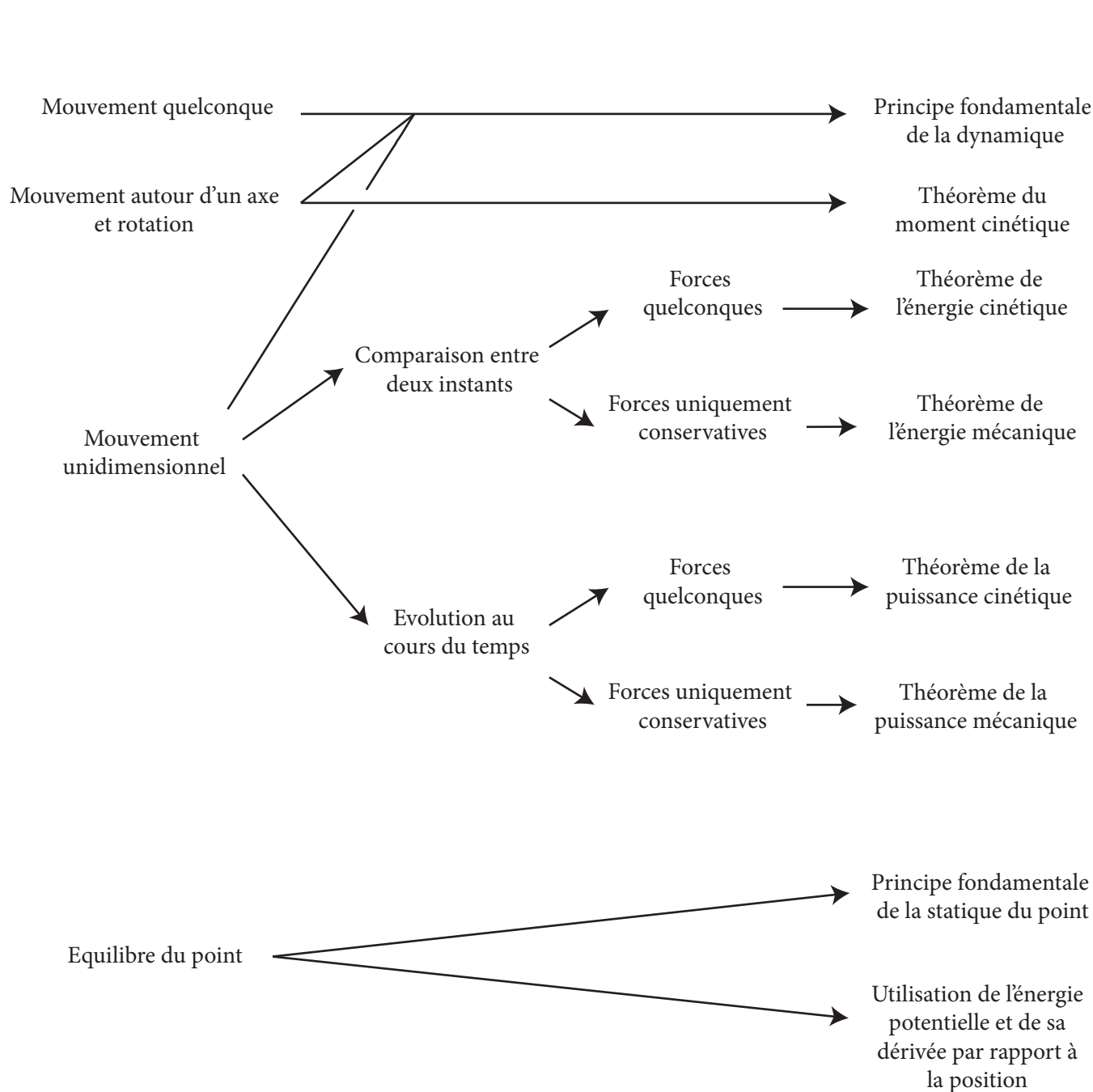
1. Déterminer l'énergie potentielle \mathcal{E}_p du point M . On considèrera l'énergie potentielle nulle lorsque le fil est vertical.
2. Déterminer les positions d'équilibre ainsi que leurs stabilités. Vérifier graphiquement en traçant la courbe \mathcal{E}_p en fonction de θ .
3. On lance avec une vitesse initiale $t = 0 = v_0 \vec{e}_\theta$ le point M au niveau de sa position d'équilibre stable. Décrire son mouvement en fonction de v_0 . On fera apparaître une vitesse critique v_c .
4. Montrer que pour $v_0 \ll v_c$, l'énergie potentielle peut se ramener à une fonction parabolique en θ .
5. Retrouver l'oscillateur harmonique en appliquant le théorème de la puissance mécanique.



4.5.2 Cas général

Dans le cas général où un point M est soumis à des forces conservatives avec une énergie potentielle présentant un minimum en $x = x_{eq}$.

Un développement de Taylor à l'ordre 2 donne alors autour de x_{eq} :



Dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen

$$m \vec{a} = \sum_{\neq i} \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{IO}}{dt}(M, t) = \sum_{\neq \vec{F}} \vec{\mathcal{M}}_{O, \vec{F}}$$

$$\Delta \mathcal{E}_C = \mathcal{E}_{C_B} - \mathcal{E}_{C_A} = \sum_{\neq \vec{F}} W_{\vec{F}}$$

$$\Delta E_m = E_{m_B} - E_{m_A} = \sum_{\neq \vec{F}} W_{\vec{F}_{nc}}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{C|\mathcal{R}}}{dt}(M, t) = \sum_{\neq \text{forces}} \mathcal{P}_{\vec{F}} = \mathcal{P}_{\Sigma \vec{F}}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

$$\sum_{\neq i} \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\frac{dE_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0$$