Chapitre 2
Calculs algébriques et inégalités

Table des matières

1 Manipulation de sommes et de produits **2**
1.1 Sommes et produits simples 2
1.2 Sommes doubles 9

2 Identités remarquables **14**
2.1 Identité de Bernoulli 14
2.2 Coefficients binomiaux 15
2.3 Binôme de Newton 17

3 Systèmes linéaires **19**
3.1 Manipulation d'éléments de $\mathbb{K}^n$ 19
3.2 Définitions de base sur les systèmes linéaires 21
3.3 Résolution d'un système échelonné 23
3.4 Pivot de Gauss 27

4 Calculs dans $\mathbb{R}$ **30**
4.1 Manipulations d'inégalités 31
4.2 Valeur absolue 32
4.3 Partie entière 33

5 Trigonométrie **35**

Dans ce chapitre, on parlera de nombres complexes, même si l'on n'a pas pris le temps de les redéfinir.

1 Manipulation de sommes et de produits

1.1 Sommes et produits simples

Commençons par des notations.

Définition 1

1. Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, si m et n sont des entiers naturels, on définit
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$
et
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times \cdots \times a_n.$$
et on lit « somme des a_k pour k allant de m à n ».
2. On note aussi
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k \text{ et } \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{m\leqslant k\leqslant n} a_k.$$
3. Si $K = \{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ est un ensemble fini, et $(b_k)_{k\in K}$ une famille finie de complexes indexée sur K. On définit
$$\sum_{k\in K} b_k = b_{k_1} + b_{k_2} + \cdots + b_{k_l}.$$
4. Par convention,
$$\sum_{k\in\emptyset} b_k = 0 \text{ et } \prod_{k\in\emptyset} b_k = 1,$$
et, si $n < m$,
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \text{ et } \prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

Exemple 2

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$
2. Si $\mathrm{I} = \{k \in [\![0, 10]\!],\ k \text{ est multiple de } 3\}$, alors $\displaystyle\prod_{i\in\mathrm{I}}(i+1) = 1 \times 4 \times 7 \times 10 = 280.$

Remarque 3

1. Les indices des sommes et des produits sont des variables muettes.
2. Le produit précédent aurait aussi pu s'écrire comme

$$\prod_{\substack{i \in [\![1,10]\!] \\ i \text{ est multiple de } 3}}$$

ou encore (par abus de notation)

$$\prod_{0 \leqslant 3k \leqslant 10} (3k+1).$$

Proposition 4

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes, λ un complexe. Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

- (linéarité)

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right), \quad \sum_{k=m}^{n}(\lambda a_k) = \lambda\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right).$$

- (comportement avec le produit)

$$\prod_{k=m}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right), \quad \prod_{k=m}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1}\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right).$$

Remarque 5

ATTENTION aux parenthèses ! Par exemple,

$$\left(\sum_{k=0}^{4} 2^k\right) - 1 = 30,$$

alors que

$$\sum_{k=0}^{4}\left(2^k - 1\right) = 0+1+3+7+15 = 26.$$

Proposition 6 (Exemples fondamentaux)

1. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda = (n - m \boxed{+1})\lambda \text{ et } \prod_{k=m}^{n} \lambda = \lambda^{n-m+1}.$$

2. (somme des puissances d'entiers) Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

3. Si $x \in \mathbb{C}$, si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \begin{cases} n - m + 1 \text{ si } x = 1 \\ x^m . \dfrac{1 - x^{n-m+1}}{1 - x}. \end{cases}$$

4. de manière plus générale,

- si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \frac{(a_m + a_n) \times (n - m + 1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{ dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}.$$

- si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, $\boxed{\text{différente de } 1}$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \text{ premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Remarque 7

En particulier,

$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda . a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Démonstration

Preuve partielle, nous ne démontrons que la somme des carrés (pour montrer que ce résultat peut toujours se trouver par récurrence). Nous attendrons un peu pour les sommes géométriques.
On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

L'**initialisation** est immédiate : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2.0+1)}{6}$.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6).
\end{aligned}$$

Or,

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

D'où l'hérédité, et, par le principe de récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. ■

Proposition 8

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ tels que $m < n < p$. Alors

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k$,
2. $\displaystyle\prod_{k=m}^{p} a_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=n+1}^{p} a_k$.

Exemple 9

Ainsi, si $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(m-1)m(2(m-1)+1)}{6}.$$

Restent maintenant deux propriétés fondamentales : le changement d'indice et le télescopage.

Proposition 10 (Changement d'indice)

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, m et n deux entiers naturels avec $m \leqslant n$.

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

On ne va pas insister sur cette proposition : ce qui est fondamental c'est la méthode.

Point de méthode 11 (Changement d'indice dans les sommes)

On veut calculer une somme du type

$$\sum_{k=m}^{n} a_k.$$

1. On **pose** $\ell = \ldots$ (une expression en fonction de k)
2. On vérifie dans quel ensemble la nouvelle variable varie. Pour les changements de variables simples (où le coefficient devant k est ± 1), on peut écrire

Quand $k = m$, $\ell = \ldots$
Quand $k = n$, $\ell = \ldots$.

3. On exprime a_k en fonction de ℓ
4. On écrit la nouvelle somme, en réordonnant éventuellement les bornes.

Remarque 12

Attention aux changements de variables qui ne sont pas du type $\ell = k + \ldots$ ou $\ell = \cdots - k$. Pour le moment, je les déconseille (attendre le chapitre 5 pour que nous parlions de bijection et de changement de variables bijectif). Ainsi, il est faux d'écrire

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{2k} = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant 2n} a_\ell.$$

C'est faux ! Le bon changement de variables est

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{2k} = \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant 2n \\ \ell \text{ pair.}}} a_\ell.$$

Exemple 13

Méthode de Gauss pour calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$. Calculons $S_n + S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k$.
Dans la seconde somme, posons $\ell = n - k$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Quand $k=0$, $\ell=n$. Quand $k=n$, $\ell=0$.
De plus $k=n-\ell$.
Donc
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{\ell=0}^{n}n-\ell=\sum_{k=0}^{n}n-k,$$
la dernière égalité étant vraie car les variables sont muettes. Donc
$$S_n+S_n=\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}n-k=\sum_{k=0}^{n}(k+n-k)=\sum_{k=0}^{n}n=n\times(n+1),$$
donc
$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 14

1. Attention à bien réordonner les bornes : ne jamais écrire, après un changement d'indices dans une somme, $\sum_{k=n}^{0}a_k$.
2. Vraiment, ne pas apprendre par cœur la propriété de changement d'indices, notamment pour les bornes : toujours refaire le calcul. Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}.$$

Proposition 15 (Sommes télescopiques)

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit (b_k) la suite définie pour tout k par $b_k=a_{k+1}-a_k$. Alors
$$\sum_{k=m}^{n}b_k=a_{n+1}-a_m.$$

Démonstration

Par linéarité de la somme,
$$\sum_{k=m}^{n}a_{k+1}-a_k=\sum_{k=m}^{n}a_{k+1}-\sum_{k=m}^{n}a_k.$$

Dans la première somme, on pose $\ell = k+1$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{\ell=m+1}^{n+1} a_\ell = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k,$$

car les variables sont muettes.
Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - a_k &= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - \left(a_m + \sum_{k=m+1} \hat{\ } n a_k\right) \\ &= a_{n+1} - a_m,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 16 (Produits télescopiques)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exemple 17

1. Calculons
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
On remarque que
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1}.$$
Alors
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Démontrons que si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Pour ce faire, on calcule Démontrons que si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Pour ce faire, on calcule
$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - x^{k+1} = 1 - x^{n+1},$$

par télescopage.

1.2 Sommes doubles

On considèrera dans toute cette partie des familles indexéess par deux indices $(a_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$.

Définition 18

Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite complexe indexée sur $\mathbb{N}^2$, $(m,n,p,q)\in\mathbb{N}^4$ tels que $m\leqslant n$ et $p\leqslant q$. On définit

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}a_{ij}$$

comme $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}b_i$ où, pour tout i, $b_i=\displaystyle\sum_{j=p}^{q}a_{ij}$.

Remarque 19

Avec les notations précédentes, on remarquera que b_i ne dépend que de i et pas de j (j étant une variable muette).

Proposition 20 (Théorème de Fubini)

Soit $(a_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}a_{i,j}\right).$$

On notera parfois cette somme

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant n}}a_{i,j},$$

ou bien, si $m=p$ et $n=q$,

$$\sum_{m\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}.$$

Remarque 21

Remarque importante : on définit exactement de la même manière les produits doubles. Afin d'alléger les propositions de cette section, nous ne les établirons que pour les sommes doubles.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exemple 22

Calculons, si $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ij \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 .
\end{aligned}$$

Ce résultat est normal, il est en fait généralisable avec la proposition suivante.

Proposition 23 (Sommes doubles décorrélées)

Soient $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux suites de complexes, $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^4$ tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$. Alors

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=p}^{q} b_j \right) = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_i b_j .$$

En particulier,

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=m}^{n} a_i a_j .$$

Remarque 24

Attention ! Il faut bien mettre deux indices différents lorsqu'on rassemble les sommes. La somme

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=p}^{q} b_i \right)$$

a tout à fait un sens, mais

$$\text{« } \sum_{i=m}^{n} \sum_{i=p}^{q} a_i b_i \text{ »}$$

ne veut rien dire.

Proposition 25 (et définition)

Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de complexes. Alors

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

On note cette somme

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}.$$

Remarque 26

1. On appelle ces sommes sommes triangulaires. Il faut pouvoir se les représenter sur un schéma.
2. Pour intervertir facilement des sommes triangulaires, écrire si possible la somme double sous la forme d'une somme qui ne contient qu'une inégalité ($0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$).

Exercice 27

Intervertir les sommes doubles suivantes

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}.$

Exemple 28

Un exemple d'application, une méthode pour calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k$, où $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{k} 1 \right) \times x^k \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x^k \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} x^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} x^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} x^i \times \frac{1 - x^{n-i+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{i=1}^{n} x^i - x^{n+1} \\
&= \frac{1}{1-x}.x.\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} n x^{n+1} \\
&= \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{n x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n x^{n+2}}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

D'autres méthodes existent, pensez-y !

1. méthode un peu astucieuse : on calcule xS_n et on essaie de retrouver S_n.

$$\begin{aligned}
xS_n &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} kx^k - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} \\
&= S_n + (n+1)x^{n+1} - x - x^2 \frac{1-x^n}{1-x},
\end{aligned}$$

donc

$$(x-1)S_n = (n+1)x^{n+1} - x - x\frac{1-x^n}{1-x},$$

i.e.

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{x-(n+1)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^2-x^{n+2}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{x-(n+1)x^{n+1}-x+(n+1)x^{n+2}+x^2-x^{n+2}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

2. la méthode de la dérivée (si jamais x est réel) : on pose

$$f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} t^k.$$

alors $f' : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}$, donc $S_n = xf'(x)$.

Or,

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

donc

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\times(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

d'où

$$S_n = xf'(x) = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2},$$

d'où, encore, le même résultat !

3. cf. TD pour une autre méthode, la transformation d'Abel.

Proposition 29 (Développement d'un carré)

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant n$. Alors

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=m}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

2 Identités remarquables

Proposition 30 (Manipulation des puissances de -1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $(-1)^n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$
2. $\dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$.

Remarque 31

Une remarque utile dans la suite du chapite : par convention, $0^0 = 1$.

2.1 Identité de Bernoulli

Proposition 32 (Identité de Bernoulli)

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \times \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-2}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Démonstration

On fait simplement le calcul du membre de droite :

$$\begin{aligned} (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^{n-1-k}b^k \\ &= \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - a^{n-(k+1)}b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k - u_{k+1} \text{ où } u_k = a^{n-k}b^k \\ &= u_0 - u_n \text{ par télescopage} \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. (la dernière égalité se démontre en refaisant le calcul ou en posant le changement d'indice $\ell = n - 1 - k$) ■

Remarque 33

1. Si n est impair, on peut factoriser $a^n + b^n$. En effet,

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= a^n - (-b)^n \text{ car } n \text{ est impair} \\ &= (a - (-b)) + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}(-b)^k \\ &= (a + b) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

2. On peut remarquer que, de manière générale, si n est pair et a et b sont non nuls, $a^n + b^n$ n'est pas factorisable en $(a + b) \times P(a, b)$ où P est une expression polynomiale en a et b (avec des sommes et des produits. En effet, si c'était le cas, $a^n + b^n$ s'annulerait en $b = -a$, i.e. $2a^n = 0$, i.e. $a = 0$.

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 34 (Factorielle)

Soit n un entier naturel. On définit la factorielle de n, notée $n!$ et lue « n factorielle » comme suit :

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par convention, $0! = 1$.

Remarque 35

La factorielle n'est **PAS** multiplicative : $(2n)! \neq 2n!$.
Par exemple, $6! = 720$, $3! = 6$.

Définition 36

Soient n dans $\mathbb{N}$ et k dans $\mathbb{Z}$. On définit le coefficient binomial « k parmi n » , noté $\binom{n}{k}$ et lu « k parmi n » :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque 37

1. Ce nombre doit être interprété comme le nombre de manières que l'on a de choisir k objets parmi n (cf. section suivante !).
2. Il peut être utile de penser à la formule de $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

Ainsi, si l'on veut calculer $\binom{100}{2}$, on ne calcule surtout pas de factorielle, mais $\frac{100 \times 99}{2 \times 1}$.

Proposition 38

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

1. (Valeurs remarquables)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
2. (symétrie) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
3. si k et n sont non nuls, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$,
4. (formule du triangle de Pascal) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
5. $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

Remarque 39

La formule du triangle de Pascal (1623-1662) permet de créer effectivement un triangle (si n croît en descendant et k croît en allant à droite)

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Démonstration

On ne fait les démonstrations que dans le cas où $k < 0$ et ou $k > n$: elles sont immédiates

1. immédiat
2. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$
3. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
4. Il suffit de mettre au même dénominateur !

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. $\binom{0}{0} = 1$ et pour tout $k \neq 0$, $\binom{0}{k} = 0$, donc pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $\binom{0}{k} \in \mathbb{N}$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la formule du triangle de Pascal,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$ sont dans $\mathbb{N}$, donc $\binom{n+1}{k}$ est dans $\mathbb{N}$.
D'où l'hérédité et le résultat, par le principe de récurrence.

■

2.3 Binôme de Newton

Proposition 40 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels, n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 41

1. Comme $a+b=b+a$, on a aussi

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2. En pratique, connaissez

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

et sachez retrouver très rapidement un petit développement à l'aide du binôme de Newton.

Démonstration

Démontrons par récurrence

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$. D'où $\mathcal{P}_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Dans la première somme, on effectue le changement d'indice $\ell = k+1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-(\ell-1)} \\
&= \sum_{\boxed{\ell=0}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} \text{ car par convention, } \binom{n}{-1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \text{ (variables muettes)}
\end{aligned}$$

De même, on peut réécrire la seconde somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{\boxed{n+1}} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

car par convention, $\displaystyle\binom{n}{n+1} = 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ par la formule de Pascal,}\end{aligned}$$

d'où l'hérédité.
Héréditaire et vraie au rang 0, la propriété est vraie par le principe de récurrence. ■

Exemple 42

Trois exemples importants d'utilisation de la formule du binôme de Newton :

1. si $x \in \mathbb{C}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times 1^{n-k} = (x+1)^n$$
2. (somme des coefficients binomiaux)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$
3. (somme alternée des coefficients binomiaux)
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n > 0 \\ 1 \text{ si } n = 0. \end{cases}$$
Cette somme vaut $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$.

3 Systèmes linéaires

Dans cette section, $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que si une propriété est formulée avec des éléments dans $\mathbb{K}$, elle sera vraie en remplaçant tous les $\mathbb{K}$ par des $\mathbb{R}$ ou tous les $\mathbb{K}$ par des $\mathbb{C}$).

3.1 Manipulation d'éléments de $\mathbb{K}^n$

Définition 43

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On appelle les éléments de $\mathbb{K}^n$ **vecteurs**, et on nommera les éléments de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

2. On représente souvent $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sous la forme d'un vecteur-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

3. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda . x_1 \\ \vdots \\ \lambda . x_n \end{pmatrix}$$

4. Si $p \in \mathbb{N}^*$, si $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$, on définit

$$\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \left\{ \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Remarque 44

On appelle $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p)$ « sous-espace vectoriel engendré par $(U_1, \dots, U_p)$ » , mais pour le moment, on prend ceci comme un mot de vocabulaire... Attendons février prochain pour en savoir davantage !

Exemple 45

Dans $\mathbb{R}^3$, si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(U, V) &= \left\{ \lambda U + \mu V,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda - \mu \\ 0 \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

On reconnaît là le **plan** passant par 0 et dirigé par (U, V).

Définition 46

Si $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $a \in \mathbb{K}^n$, si $(U_1,\dots,U_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$, on définit

$$a + \mathrm{Vect}(U_1,\dots,U_p) = \left\{a + \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p,\ (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\}.$$

Exemple 47

Dans $\mathbb{R}^2$, si $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$a + \mathrm{Vect}(U) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il s'agit de la droite passant par $(0,1)$ et de vecteur directeur U.

On connaît depuis les petites classes une autre description des droites ou des plans : via des équations.

3.2 Définitions de base sur les systèmes linéaires

Définition 48

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$.

1. si $(a_1,\dots,a_p)$ et b $p+1$ éléments de $\mathbb{K}$. L'équation linéaire de coefficients $(a_1,\dots,a_p)$ et de second membre b est l'équation d'inconnues $(x_1,\dots,x_p)$ suivante :
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b.$$
2. Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues est la donnée de n équations linéaires à p inconnues. On parlera aussi de système linéaire.
3. On écrit un système linéaire sous la forme
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$
On dit alors que
   - $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont les coefficients du système,
   - $(x_1,\dots,x_p)$ sont les inconnues du système,
   - $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé second membre du système.
4. Si $(b_1,\dots,b_n) = (0,\dots,0)$, on dit que le système est **homogène**.

5. **Résoudre** un système, c'est déterminer l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ solutions du système.
6. Le système linéaire homogène associé au système précédent est le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Exemple 49

1. Le système
$$\begin{cases} 2x + y + 3x = 0 \\ x - z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$
d'inconues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un système linéaire à trois inconnues, de second membre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. En revanche, le système
$$\begin{cases} x + yz = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$
d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ n'est pas un système linéaire.
3. Attention à bien **préciser** les inconnues. Ainsi,
   - $\{x = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est un système à une seule solution,
   - $\{x = 0$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a pour ensemble de solutions l'axe des abscisses,
   - $\{x = 0$ d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a pour ensemble de solutions le plan d'équation $x = 0$.

Proposition 50

Soit (S) un système linéaire **homogène**.

1. (solution évidente) $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution du système.
2. (principe de linéarité) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots\, y_n \end{pmatrix}$ sont deux solutions de (S), si

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda X + \mu Y$ est solution de (S).

Proposition 51 (Structure des solutions d'un système linéaire)

Soit (S) un système linéaire quelconque, (S_H) le système homogène associé.

1. si X et Y sont deux solutions de (S), alors $X - Y$ est solutions de (S_H).
2. si X_0 est **une** solution de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\{X_0 + Y,\ Y \text{ solution de } S_H\}.$$

Exemple 52

Nous n'allons pas prouver ces résultats : ils sont simples à prouver mais un peu longs à écrire. En revanche, on remarque que si l'on regarde le système

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont solutions, alors

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2c - d = 1 \\ c + 2d = 3 \end{cases}$$

Donc, en soustrayant les premières lignes et les secondes lignes,

$$\begin{cases} 2(a-c) - (b-d) = 0 \\ a - c + 2(b-d) = 0 \end{cases}$$

Mais donc, si X_0 est solution du système et que Y est une solution quelconque, $Y - X_0$ est solution de S_H : d'où la propriété de structure des solutions.

3.3 Résolution d'un système échelonné

Définition 53

Soit (S) un système linéaire, de lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$, d'inconnues $(x_1, \dots, x_p$. S est dit échelonné si pour tout i entre 1 et $n-1$,
si les variables $(x_1, \dots, x_k)$ ont un coefficient **nul** à la ligne L_i,
alors les variables $(x_1, \dots, x_k, \boxed{x_{k+1}})$ ont un coefficient nul à la ligne L_{i+1}.

Exemple 54

Plutôt que d'apprendre la définition par cœur, mieux vaut regarder des exemples !

1. Le système
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$
est échelonné. En effet,
   - L_1 n'a aucun premier coefficient nul,
   - L_2 a un coefficient nul devant x_1 et x_2,
   - L_3 a un coefficient nul devant x_1, x_2 et x_3.
2. Le système
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$
n'est pas échelonné :
   - L_1 n'a aucun premier coefficient nul,
   - L_2 a bien un coefficient nul de plus que L_1 : celui de x_1,
   - **mais** le coefficient de x_1 dans L_3 n'est pas nul : le système n'est pas échelonné.
3. L'ordre des variables importe donc ! Par exemple, le système
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$
d'inconnues (x, y, z), n'est pas échelonné, alors que le système
$$\begin{cases} z + x - 2y = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$
d'inconnues (z, x, y) est échelonné.

Point de méthode 55 (Résolution d'un système échelonné)

1. On regarde les lignes du type $0 = \alpha$:
   - si $\alpha \neq 0$, alors le système est dit **incompatible**, il n'a pas de solution.
   - si $\alpha = 0$, on retire simplement la ligne.
2. une fois ces lignes retirées,
   - s'il y a autant de lignes que d'inconnues, le système a une unique solution, obtenue en remontant à partir de la dernière ligne.
   - sinon, il y a strictement moins de lignes que d'inconnues : on remplace par des paramètres réels les inconnues manquantes. Les inconnues manquantes sont les variables *non présentes en début de ligne*.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Remarque 56

On n'hésitera pas à utiliser le symbole $\Leftrightarrow$ **entre les systèmes linéaires**.

Exemple 57

1. Résolvons $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ y+2z=3 \\ z=-1 \end{cases}$ d'inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x+3y-z=2 \\ y+2z=3 \\ z=-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=3-2z=5 \\ x=2-3y+z=2-15-1=-14 \end{cases}$$

Donc LA solution du système est $\left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Résolvons

$$\begin{cases} x-y+z+t=2 \\ z-t=-1 \end{cases}$$

d'inconnues $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On écrit

$$\begin{cases} x-y+z+t=2 \\ z-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t=2 \\ z-t=-1y \quad =\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z=\beta,\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ t=\beta,\ \beta \in \mathbb{R}z \quad =-1+\beta \\ x=y-z-t+2=3+\alpha-2\beta \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est (attention à l'ordre des variables)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3+\alpha-2\beta \\ \alpha \\ -1+\beta \\ \beta \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(U,V),$$

où $U = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 58

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ \quad 4y + z = 5 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ \quad 4y + z = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad 4y + z = 0 \end{cases}.$$

Que remarquez-vous ?

3.4 Pivot de Gauss

Maintenant que l'on sait résoudre un système échelonné, il faut savoir comment on peut échelonner un système : c'est le principe du pivot de Gauss.

Définition 59

Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition 60

Soit S un système linéaire, de lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$. Une opération élémentaire sur S est une des opérations suivantes :

(i) l'échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$.

(iii) l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 61

Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Point de méthode 62 (Pivot de Gauss)

Pour échelonner un système linéaire, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array} \right.$$

d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

1. On part de l'inconnue x_1 dans la première ligne : si x_1 n'est pas présente dans la première ligne, on le cherche dans les lignes suivantes et on effectue une permutation. Si x_1 n'est pas du tout présente, on passe à x_2. L'inconnue ainsi sélectionnée est appelée **pivot**.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \boxed{x_1} & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array} \right.$$

2. On supprime, à l'aide de transvections, toutes les occurrences de x_1 dans les lignes qui suivent

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ \end{array}\right.$$

3. On cherche maintenant x_2 dans la deuxième ligne : s'il n'y est pas, on fait une permutation avec une ligne qui est **sous** la deuxième ligne (pour conserver le caractère échelonné).

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & \boxed{x_2} & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ & & & & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

4. On supprime toutes les occurrences de x_2, dans les lignes qui suivent (pas dans les lignes du dessus, pas utile).

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ & & & & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

Là notre système est échelonné, mais on pourrait continuer ainsi, en utilisant x_3 comme pivot, etc.

Remarque 63

Toujours indiquer les opérations élémentaires que vous faites : pour vous relire déjà, et car un calcul non justifié et faux ne rapporte absolument aucun point, alors que s'il est détaillé, il peut rapporter quelques points.

Exercice 64

Résoudre

$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 2x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + z - 3t = -1 \\ -z + t = 0 \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et

$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ x - y - z + 2t = 0 \\ x + 2t = 1 \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Remarque 65

1. Il n'y a pas unicité de l'écriture de l'ensemble des solutions d'un système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right).$$

2. Quand on fait plusieurs transvections simultanément, il faut toujours enlever des multiples **de la même ligne**. Exemple horrible :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Si on écrit $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, en ne faisant pas attention, on se ramène à

$$\begin{cases} 2y = 1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$

On a perdu l'inconnue x ! Le problème vient du fait que, dans la deuxième opération, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, L_1 désigne L_1 **après modification** par la première opération...
Bref, en un mot, il faut suivre l'algorithme !

Point de méthode 66 (Résolution d'un système linéaire à paramètres)

On cherche à résoudre un système linéaire avec certains coefficients qui sont des **paramètres** dans $\mathbb{R}$. Ils sont fixés mais on ne connaît pas leur valeur. Par exemple :

Soient $(m, s) \in \mathbb{R}^2$. Discuter de l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + sy = 1 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On fait l'échelonnement du système et sa résolution comme vu précédemment et, dès qu'on a une opération potentiellement interdite, on **disjoint** les cas. Regardons l'exemple.

$$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + sy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ (s-2)y = 1-2m \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

- **si** $s-2 \neq 0$, alors le système devient

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-2m}{s-2} \\ x = m - y = \dfrac{ms-2m-1+2m}{s-2} = \dfrac{ms-1}{s-2}. \end{cases}$$

Le système a alors une unique solution, $\dfrac{1}{s-2}\begin{pmatrix} ms-1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$.

- sinon, $s=2$ et le système devient

$$\begin{cases} x+y=m \\ 0 = 1-2m \end{cases}$$

Définition 67

On dit que la ligne $0 = 1-2m$ est une **condition de compatibilité du système**.

— si $1-2m \neq 0$, alors le système est incompatible, il n'a aucune solution.

— sinon $m = \dfrac{1}{2}$,, le système devient

$$\left\{ x+y = \frac{1}{2} \right.$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{1}{2} - y = \dfrac{1}{2} - \alpha \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

4 Calculs dans $\mathbb{R}$

Dans cette section, contrairement aux autres, on se place **sur** $\mathbb{R}$**.**

4.1 Manipulations d'inégalités

Proposition 68

Soient a, b, c, d 4 réels.

1. si $a < b$, alors $a \leqslant b$,
2. si a et b sont entiers et $a < b$, alors $a \leqslant \boxed{b-1}$,
3. si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + b \leqslant b + x \leqslant b + d$,
4. si $a \leqslant b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$,
5. si $0 < a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$,
6. si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$,
7. si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$,
8. si $a \in [0, 1]$, $a^2 \leqslant a$ et si $a \geqslant 1$, $a^2 \geqslant a$.
9. si $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ et si $a = d$, alors $a = b = c = d$.

Remarque 69

- Dans la proposition 5., attention au fait que les deux réels doivent être de même signe : $-1 < 1$ et $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.
- Dans la proposition 9., on l'utilise souvent de cette manière : on établit une suite d'inégalités :

$$a \leqslant \cdots \leqslant \cdots \leqslant \cdots \leqslant b,$$

et on s'intéresse au cas d'égalité entre a et b. On écrit alors

« Il y a égalité entre a et b s'il y a égalité dans toutes les inégalités. »

- On ne soustrait pas les inégalités !

Une conséquence du 9. est la

Proposition 70

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ des réels positifs ou nuls.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

4.2 Valeur absolue

Définition 71

Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 72

- $|3| = 3$, $|-2| = 2$.
- La valeur absolue représente la distance à 0 d'un réel.

Proposition 73

Soit x un nombre réel. Alors

(i) $|x|geq0$,

(ii) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \geqslant 0$, $|x| = x \geqslant 0$, et $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = x^2 \end{cases}$ donc $\sqrt{x^2} = x = |x|$,
- si $x \leqslant 0$, $|x| = -x \geqslant 0$, et $\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ x^2 = (-x)^2 \end{cases}$ donc $\sqrt{x^2} = -x = |x|$.

$\blacksquare$

Remarque 74

$(a^2 = b^2)$ n'implique pas $(a = b)$! En revanche, si les quantités sont positives, si !

Proposition 75

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. L'équation $|x| = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet

- 0 solution si $a < 0$,
- 1 solution si $a = 0$,

- 2 solutions si $a > 0$, $x = a$ ou $x = -a$.

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

3. Si $a > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant a \text{ et } x \geqslant -a.$$

Point de méthode 76

Pour manipuler des équations ou des inéquations avec des valeurs absolues, essentiellement deux méthodes :

- Disjoindre les cas pour faire disparaître les valeurs absolues,
- Passer au carré ! Comme les valeurs absolues sont positives, $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Exercice 77

Résoudre

- $|x - 1| = |2x - 3|$
- $|x - 1| \geqslant |x + 1|$.

Proposition 78 (Inégalité triangulaire)

Soient x et y deux réels.
Alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

4.3 Partie entière

Définition 79

Soit $x \in \mathbb{R}$.
La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, ou parfois $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Remarque 80

L'existence de ce plus grand entier vient du fait que $\{p \in \mathbb{Z},\ p \leqslant z\}$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{Z}$ qui admet donc (cf + tard) un plus grand élément.

Exemple 81

$\lfloor 1,8 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
$\lfloor -3,4 \rfloor = -4$.

Remarque 82

On utilise parfois (en informatique notamment) la partie entière supérieure, $\lceil x \rceil$, qui désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x :

$$\lceil 1,2 \rceil = 2,\ \lceil -2,5 \rceil = -2,\ \lceil 8 \rceil = 8 = \lfloor 8 \rfloor .$$

Proposition 83 (Caractérisations de la partie entière)

Soit x un réel, k un entier relativ.

1. $k = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow k \leqslant x < k+1$.
   ($\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier satisfaisant cette inégalité)
2. $k = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x - 1 < k \leqslant x$.

Exemple 84

1. On utilise souvent la partie entière pour expliciter l'existence d'un entier tel que...

   « Montrer que : $\forall M > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^n \geqslant M$. »

   Soit $M > 0$.

   ...au brouillon...

   On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{e}^n \geqslant M$. On remarque que $e^n \geqslant M \Leftrightarrow n \geqslant \ln(M)$.

   Posons $n_0 = \lfloor \ln(M) \rfloor + 1$.
   Alors $n_0 \geqslant \ln(M) - 1 + 1 = \ln(M)$, donc $\mathrm{e}^{n_0} \geqslant \mathrm{e}^{\ln(M)} = M$.
2. Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k}.$$

Exercice 85

1. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. A-t-on pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

5 Trigonométrie

Le but de cette section est simplement de donner et de manipuler certaines formules mettant en jeu la trigonométrie. Nous ne démontrerons pas énormément de choses, et ferons surtout des calculs de base : certains calculs se font réellement bien avec les nombres complexes !

Proposition 86

Soit (x, y) un point du cercle trigonométrique. Alors il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. On dit que le cercle trigonométrique est paramétré par cosinus et sinus.

Définition 87

Soit α un réel non nul, x et y deux réels. On dit que x et y sont congrus modulo α si et seulement s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$. On note $x = y[\alpha]$ ou $x \equiv y[\alpha]$.
On note $\alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et $x + \alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{x + k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque 88

1. $x = y[\alpha]$ si et seulement si $y = x[\alpha]$.
2. Ainsi, « x et y sont congrus modulo α » $\Leftrightarrow x - y \in \alpha\mathbb{Z} \Leftrightarrow y \in x + \alpha\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in y + \alpha\mathbb{Z}$.
3. Deux réels sont congrus modulo 1 si et seulement s'ils ont même partie fractionnaire.

Proposition 89

Soient α et β deux réels. Alors :

1. $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta[2\pi]$ ou $\alpha = -\beta[2\pi]$,
2. $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta[2\pi]$ ou $\alpha = \pi - \beta[2\pi]$,
3. $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta[2\pi]$.

Définition 90

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On définit $\tan(\theta)$, appelée tangente de θ, par $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Remarque 91

On note, parfois, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\text{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Attention au fait que cotan et tan n'ont pas le même ensemble de définition.

Proposition 92 ((Valeurs remarquables))

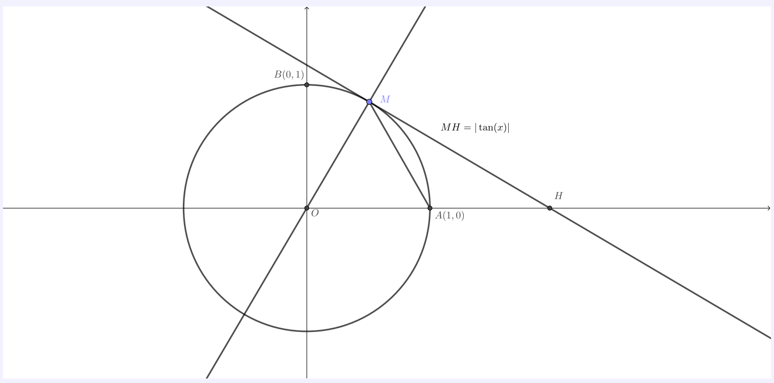
Ces valeurs sont à connaître

θ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	non définie

Remarque 93

La tangente a une interprétation graphique :

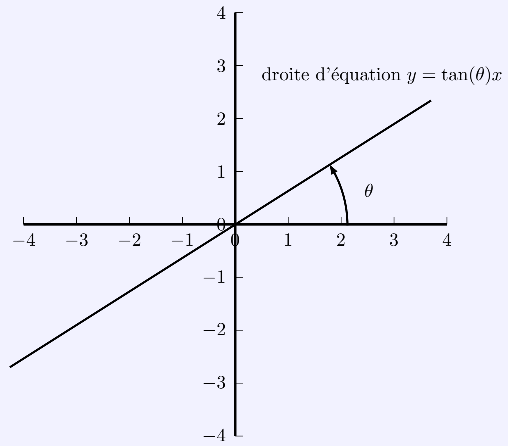
- Déjà, elle se lit sur le cercle trigonométrique :



- Ensuite, si on prend la droite passant par 0 et faisant l'angle θ avec l'axe des abscisses,

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

cette droite est d'équation $y = \tan(\theta)x$:



Proposition 94 (transformations de sin / cos / tan – à savoir retrouver !)

On a les relations suivantes

θ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$-\theta$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$-\tan(\theta)$
$\theta+\pi$	$-\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$\pi-\theta$	$\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$-\tan(\theta)$
$\theta+\dfrac{\pi}{2}$	$\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$-\operatorname{cotan}(\theta)$

Proposition 95 (Équations avec des sin / cos tan)

Soient θ et φ deux réels.

1. $\sin(\theta) = \sin(\varphi)$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \pi - \varphi + 2k\pi.$$
2. $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = -\varphi + 2k\pi.$$
3. $\tan(\theta) = \tan(\varphi)$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + k\pi.$$

Exercice 96

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$,
2. $\sin(\theta) \leqslant \dfrac{1}{2}$,
3. $\sin(\theta)^2 \leqslant 3\cos(\theta)^2$.

Corollaire 97

Dans toute la proposition, (a, b, p, q) sont des réels, choisis tels que les expressions soient bien définies.

1. (formules avec des carrés)
   (a) $\boxed{\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1}$
   (b) $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
2. (sin / cos / tan de sommes) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
   (a) Sommes

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$
$$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

   (b) Différences

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

   (c) Duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

3. (Formules de linéarisation)

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.$$

4. (Factorisation)

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

5. (Formules d'arc moitié) Si $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$,

$$\cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(a)=\frac{2t}{1+t^2},\ \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Démonstration

Les trois formules encadrées sont les plus fondamentales, elles viennent de la définition même de l'exponentielle complexe et de sa multiplicativité. On va expliquer comment obtenir les autres à partir ce celles-ci.

1. Pour la formule reliant tan et cos, on remarque que

$$1+\tan^2(a) = 1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a)+\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}.$$

2. Pour $\tan(a+b)$, on écrit

$$\begin{aligned}\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.\end{aligned}$$

L'obtention des formules avec les $-$ et les 2 est alors immédiate.

3. On explique pour les formules de linéarisation la méthode générale :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

En additionnant les deux lignes, on obtient

$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b),$$

d'où la première formule de linéarisation. La seconde s'obtient en soustrayant les deux lignes, et la dernière en faisant la même chose avec $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

4. L'idée est de trouver a et b tels que $p = a + b$ et $q = a - b$. Si c'est le cas,

$$\cos(p) + \cos(q) = \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

Mais $\begin{cases} a + b = p \\ a - bq \end{cases}$ est un système linéaire, de solutions $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$, d'où la formule !

5. Si $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
\cos(a) &= \cos\left(\frac{2a}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{a}{2}\right)\left[1 - \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}\right] \\
&= \cos^2\left(\frac{a}{2}\right)(1 - t^2) \\
&= \frac{1 - t^2}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}} \\
&= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ car } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Ensuite, $\tan(a) = \tan\left(2\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, et

$$\sin(a) = \tan(a)\cos(a) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

■

Exercice 98

Quelques exercices d'application :

(i) calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(ii) soient ϕ et ω deux réels. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi t)\cos(\omega t)dt.$$

Cette question est très importante en physique.

Exemple 99

(propriété importante en physique)

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (A, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi).$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Analyse. On suppose qu'il existe A et φ tels que pour tous t dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi) = A\cos(t)\cos(\varphi) + A\sin(t)\sin(\varphi).$$

Pour $t = 0$, $a = A\cos(\varphi)$,
Pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, $b = A\sin(\varphi)$.
alors

$$a^2 + b^2 = A^2\cos^2(\varphi) + A^2\sin^2(\varphi) = A^2,$$

donc, comme $A \geqslant 0$, $A = \sqrt{a^2+b^2}$.
Donc

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

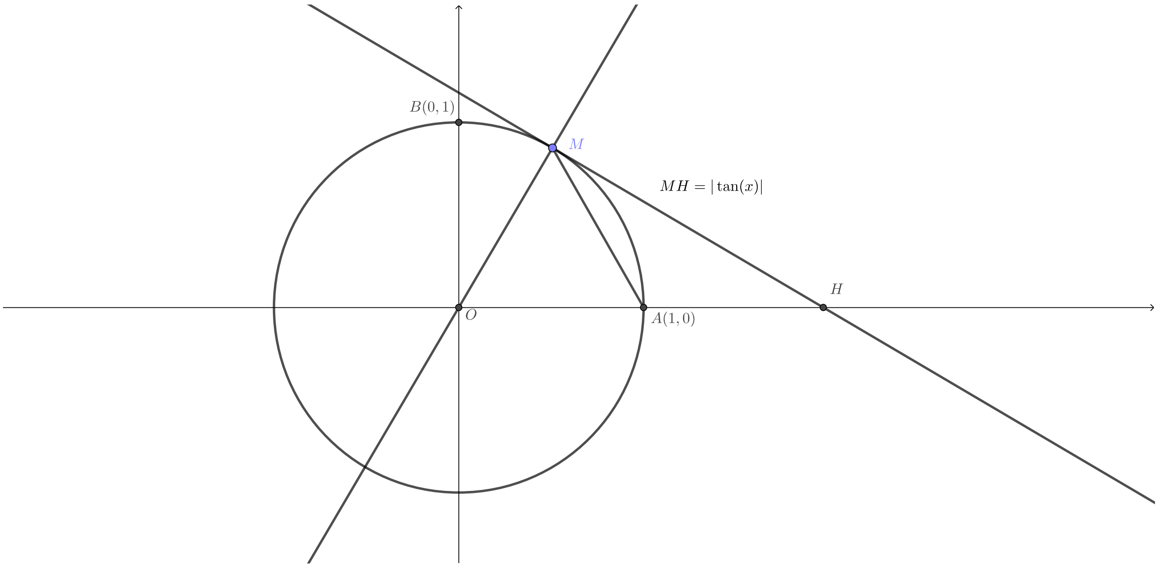
φ est donc unique modulo 2π.
Synthèse à peu près évidente !

Proposition 100 (Quelques propriétés importantes)

1. pour tout x réel, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
2. $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} = 1$.
3. les fonctions sin et cos sont dérivables, de dérivées respectives cos et $-\sin$.
4. la fonction tangente est dérivable, de dérivée $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

Démonstration

Ici, nous ne ferons que des preuves géométriques.



1. L'aire du triangle OAM, égale à $\frac{1}{2}|\sin(x)|$, est inférieure à l'aire de la portion de disque OAM, égale à $\frac{1}{2}|x|$. (on rappelle que l'aire du disque est égale à $\frac{1}{2}2\pi$)

2. Soit $|x| \leqslant 1$, en particulier $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ (nous verrons plus tard, lorsque nous définirons la notion de limite, que comme la notion de limite est une notion locale, on peut choisir de se placer au voisinage de 0). L'aire de la portion de disque OAM est inférieure à l'aire du triangle OHM, égale à $\frac{1}{2}|\tan(x)|$. Ainsi, $|\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|}$. Donc

$$|\cos(x)|.|x| \leqslant |\sin(x)| \leqslant |x|,$$

soit, si $x \neq 0$,

$$|\cos(x)| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leqslant 1,$$

donc, par théorème d'encadrement, $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Comme x et $\sin(x)$ sont de même signe lorsque $x \in [-1,1]$, $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h)+\sin(h)\cos(a)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}\cos(a) + \frac{\cos(h)-1}{h}\sin(a).$$

Or, $\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{-2\sin^2(h/2)}{h} = -\sin\frac{h}{2}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos(a).$$

De même,

$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h} = \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} -\sin(a).$$

4. Il s'agit de la dérivée d'un quotient !

■

Proposition 101 (Propriétés de sinus)

1. sin est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$
2. sin est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
3. sin est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
4. Pour tout x réel, $(\sin(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in [2p\pi, \pi + 2p\pi])$.
5. sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Pour tout entier n, sin est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
7. sin est croissante sur les intervalles de la forme $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ où $k \in \mathbb{Z}$, et décroissante sur les intervalles de la forme $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
8. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
9. sin n'a pas de limite en $\pm\infty$
10. Inégalités classiques : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$ et $\forall x \in [0, \pi/2],\ \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Proposition 102 (Propriétés de cosinus)

Soit $f : x \mapsto \cos(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$
2. f est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
3. f est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
4. $(\cos(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \left(\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2p\pi, \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right]\right)$.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. pour tout entier n, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
7. f est croissante sur les intervalles de la forme $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$ et décroissante sur les intervalles de la forme $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.
8. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
9. f n'a pas de limite en $\pm\infty$
10. Inégalités classiques : $\forall x \in [0, \pi/2],\ 1 - \frac{2x}{\pi} \leqslant \cos(x)$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Proposition 103 (Propriétés de tangente)

Soit $f : x \mapsto \tan(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
2. f est π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(x+\pi) = \tan(x)$.
3. f est impaire : $\tan(-x) = -\tan(x)$.
4. $(\tan(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in \left[p\pi, p\pi + \frac{\pi}{2} \right[ )$.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.
6. f est croissante sur tout intervalle de la forme $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, où $k \in \mathbb{Z}$.
7. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
8. f n'a pas de limite en $\pm\infty$, mais $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
9. Inégalités classiques : $\forall x \in [0, \pi/2], \tan(x) \geqslant x$.
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

Proposition 104 (Formules de l'arc moitié)

Soit x un réel qui ne soit pas un multiple de π. Notons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Alors $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.